B.3 Bukti Membuat Buku

Pengantar **Persamaan Diferensial**

Persamaan diferensial merupakan hal yang lazim dipelajari pada program studi keteknikan, termasuk di program studi Teknik Sipil. Buku ini membahas bagian fundamental dari materi tentang Persamaan Diferensial. Materi yang dipelajari dalam buku ini meliputi Persamaan Diferensial ordo satu, dua ataupun yang lebih tinggi, serta Persamaan Diferensial Linear maupun yang Non Linear. Berbagai bentuk Persamaan Diferensial yang umum dijumpai berikut teknik untuk menyelesaikannya akan dibahas dalam buku ini. Selain itu buku ini juga disusun sebagai bagian dari peringatan 1 dasawarsa Universitas Pembangunan Jaya, yang pada tahun 2021 tepat berusia 10 tahun.

Daftar Isi

Tentang Pengarang

Agustinus Agus Setiawan, S.T., M.T. saat ini adalah staf pengajar di Program Studi Teknik Sipil Universitas Pembangunan Jaya, Tangerang Selatan. Beberapa buku beliau di bidang Teknik Sipil diterbitkan oleh penerbit nasional, seperti Penerbit Erlangga dan Andi Offset. Gelar Master di bidang Teknik Sipil, beliau raih dari Institut Teknologi Bandung.

Johannes Hamonangan Siregar, Ph.D. saat ini menjadi pengajar dari Program Studi Sistem Informasi,yang mengampu mata kuliah Dasar Logika Matematika, Sistem Basis Data, Knowledge Management, Keamanan Informasi dan Administrasi Sistem. Pendidikan Master beliau diperoleh dari Yokohama National University dari bidang Pendidikan Matematika, sedangkan gelar Ph.D beliau raih dari University of Tsukuba, Jepang dari bidang Systems and Information Engineering.

UPJ Press
Jl. Cendrawasih Raya Blok B7/P
Bintaro Jaya, Sawah Baru,
Ciputat, Tangerang Selatan 15413

ISBN 978-623-7455-24-0

Penerbit **UPJ Press**

Pengantar
Persamaan Diferensial

Agus Setiawan
Johanes H Siregar

PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Penulis
Agustinus Agus Setiawan
Johanes Hamonangan Siregar

Editor
Agustinus Agus Setiawan
Nadiah Salsabila

Buku ini diset dan dilayout oleh bagian produksi *UPJ Press* dengan Microsoft Word 2013

Desain Sampul dan Layout
Firdi Audi Putra

Percetakan : *UPJ Press*

PRAKATA

Persamaan diferensial merupakan hal yang lazim dipelajari pada program studi keteknikan, tak luput adalah di program studi Teknik Sipil. Buku ini membahas bagian fundamental dari materi tentang Persamaan Diferensial. Materi yang dipelajari dalam buku ini meliputi Persamaan Diferensial ordo satu, dua ataupun yang lebih tinggi, serta Persamaan Diferensial Linear maupun yang Non Linear. Berbagai bentuk Persamaan Diferensial yang umum dijumpai berikut teknik untuk menyelesaikannya akan dibahas dalam buku ini. Hanya saja pembahasan dalam buku ini hanya dibatasi untuk masalah Persamaan Diferensial yang biasa, sedangkan persoalan Persamaan Diferensial Parsial akan ditinjau dalam bahasan yang lain.

Dengan disusunnya buku berjudul Pengantar Persamaan Diferensial ini, diharapkan dapat membantu mahasiswa, khususnya mahasiswa Program Studi Teknik Sipil di Universitas Pembangunan Jaya. Diharapkan mahasiswa rajin untuk mencoba menyelesaikan setiap soal yang ada, dan rajin pula untuk membaca berbagai buku referensi yang ada, mengingat permasalahan dalam Persamaan Diferensial ini cukup luas.

Selain itu buku ini juga disusun sebagai bagian dari dedikasi penulis kepada institusinya, yaitu Universitas Pembangunan Jaya, yang pada tahun 2021 ini tepat berusia 10 tahun. Sebagai bagian dari rangkaian acara 1 dasawarsa Universitas Pembangunan Jaya, maka penulis mempersembahkan buku ini sebagai bagian dari wujud implementasi kegiatan Tridharma seorang dosen.

Akhir kata semoga buku ini dapat dimanfaatkan dengan baik dan benar oleh pembacanya.

Tangerang Selatan, April 2021

Agustinus Agus Setiawan.

DAFTAR ISI

BAB I

PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN BERBAGAI APLIKASINYA

1.1. Pendahuluan

Persamaan Diferensial merupakan salah satu alat penting dan serba guna yang dimiliki oleh para ilmuwan, baik ahli dalam bidang Fisika, Sipil, Biologi, Kimia, Ekonomi dan lain – lain. Dalam menyelesaikan masalah – masalah yang dihadapi, para ilmuwan pada umumnya melaksanakan serangkaian eksperimental. Dari serangkaian uji coba ini, mereka mencoba menyusun atau membuat suatu model matematis, yang dapat dirumuskan dalam suatu persamaan diferensial. Banyak persoalan yang dapat diselesaikan dengan bantuan persamaan diferensial ini.

Model matematis yang digunakan tadi tentunya harus sesuai dengan kejadian nyata yang dihadapi dalam eksperimen. Bila ternyata terjadi banyak penyimpangan dari kejadian sebenarnya, maka dapat dikatakan bahwa model matematis dan persamaan diferensial yang dihasilkan tersebut adalah salah..

Bukan suatu barang yang mudah untuk menterjemahkan fenomena alam ke dalam suatu formulasi matematis. Dan perlu diingat pula bahwa terkadang tidak lebih mudah pula untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang telah diperoleh.

1.2. Pengertian Dan Macam – Macam Persamaan Diferensial

Sebuah persamaan yang mengandung suatu turunan atau derivatif disebut dengan istilah persamaan diferensial (PD). Ada dua tipe dasar persamaan diferensial :

a. Persamaan Diferensial Biasa (PDB) :

   Adalah suatu persamaan yang menghubungkan satu variabel terikat dengan satu variabel bebas saja. Contoh :

$$\frac{dy}{dt} = 3y^2 \sin(t + y) \qquad (1.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad (1.2)$$

   Variabel y disebut sebagai variabel terikat, sedangkan t dan x merupakan variabel bebasnya.

b. Persamaan Diferensial Parsial (PDP) :

   Adalah persamaan yang menghubungkan satu variabel terikat dengan dua atau lebih variabel bebas. Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.3)$$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1.4)$$

Dalam contoh (1.3), u adalah sebagai variabel yang terikat dengan dua variabel bebas x dan y. Sedangkan dalam contoh (1.4), T sebagai variabel terikat yang dihubungkan dengan variabel bebas x dan t.

Di dalam buku ini hanya akan dibahas mengenai PD Biasa, dan untuk selanjutnya istilah PD dalam buku ini adalah mengacu pada PD Biasa saja.

1.3. Ordo dan Derajat Persamaan Diferensial

Ordo PD adalah ordo dari derivatif tertinggi yang ada dalam persamaan tersebut. Bila suatu PD dapat dituliskan dalam bentuk polinom berderajat **n** dari ordo yang tertinggi, maka dikatakan bahwa PD tersebut mempunyai derajat **n** atau PD dengan *degree* **n**.

Contoh : tentukan ordo dan derajat dari masing – masing PD berikut ini.

$$\frac{dy}{dx} = x + 8 \qquad (1.5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sqrt{3 - \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2} \qquad (1.6)$$

$$(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2 \qquad (1.7)$$

$$y''' + 3(y'')^5 + y' = \cos x \qquad (1.8)$$

Jawaban : PD (1.5) berordo 1 dengan derajat 1

PD (1.6) berordo 3 dengan derajat 2

PD (1.7) berordo 2 dengan derajat 2

PD (1.8) berordo 3 dengan derajat 1

Latihan:

Perhatikan PD berikut ini, tentukan ordo dengan derajatnya

1. $\frac{dy}{dx} = 3y^3$
2. $y^{(4)} + 3\,(y')^4 + 5\,y = 0$
3. $\left(\frac{d^2y}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} - y = 3$
4. $p\,y'' + q\,(y')^2 + \mathrm{y}\sin\alpha = \cos\beta$
5. $3\,(y''')^4 + 2\,y'' - e^{5x} = 3x$

1.4. Solusi Persamaan Diferensial

Bila ditinjau sebuah persamaan kuadrat berikut ini :

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \qquad (1.9)$$

Maka dengan amat mudah dapat kita katakan bahwa x = 6 dan x = -1 adalah merupakan suatu solusi dari persamaan kuadrat tersebut. Demikian pula halnya dengan solusi suatu PD, bila ada PD berikut :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (1.10)$$

Maka solusi dari PD (1.10) tersebut dapat diperoleh bila ada suatu fungsi y(x) yang memenuhi persamaan (1.10) di atas. Dapat ditemukan bahwa salah satu solusi PD itu adalah y = cos x, karena $\frac{d^2}{dx^2}(\cos x) = -\cos x$. Sehingga terpenuhi bahwa $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. Dapat ditemukan pula solusi lain dalam bentuk y = sin x.

Karena ditemukan dua buah solusi $y_1 = \cos x$ dan $y_2 = \sin x$, maka solusi umum dari PD (1.10) tersebut adalah : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Dengan C_1 dan C_2 merupakan dua buah konstan bebas. Jadi dapat dirumuskan di sini bahwa untuk suatu PD ordo n mempunyai **solusi umum (primitif)** yang mengandung n buah konstanta bebas sembarang.

Bila diberikan suatu harga sembarang untuk C_1 dan C_2 misalkan C_1=3 dan C_2 = 1, sehingga solusi menjadi y = 3 cos x + sin x, maka solusi ini disebut dengan istilah **solusi khusus.**

Bagaimana halnya sekarang bila solusi umum suatu PD sudah diketahui dan kita ingin mencari persamaan diferensialnya ? Jauh lebih mudah untuk mencari bentuk PD dari suatu solusi yang sudah diketahui, daripada mencari solusi dari suatu PD. Sudah dijelaskan di atas bahwa untuk setiap PD ordo n, selalu terkait dengan n buah konstan sembarang.

Solusi : $G(x, y, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n) = 0$

PD : $F(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$

Maka untuk menentukan bentuk PD dari solusi umum (primitif) tersebut, dapat dijalankan langkah – langkah sebagai berikut :

a. primitif dibuat derivatif sebanyak n kali
b. jadi akan ada n + 1 persamaan (termasuk primitif yang sudah ada)
c. PD diperoleh lewat eliminasi dengan menggunakan konstan sembarang sebanyak n (C_1, C_2, …C_n)

Sebaliknya untuk menentukan solusi umum dari bentuk PD dilakukan dengan mengintegralkan dari persamaan tersebut.

Contoh :

1. Diberikan primitif $y = A.e^x + B$, tentukan bentuk PD nya.

Ada dua konstan sembarang yaitu A dan B, maka primitif kita diferensialkan dua kali :

$$\frac{dy}{dx} = y' = A.e^{x} \qquad (\text{ i })$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = A.e^{x} \qquad (\text{ ii })$$

Menyamakan (i) dan (ii) akan diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ atau y' = y''

2. Diberikan PD $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x$, tentukan solusi umumnya (primitif)

PD berorde 2 maka dilakukan integral dari PD sebanyak 2 kali

-Integral yang pertama dari PD

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int 4x\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + C$$

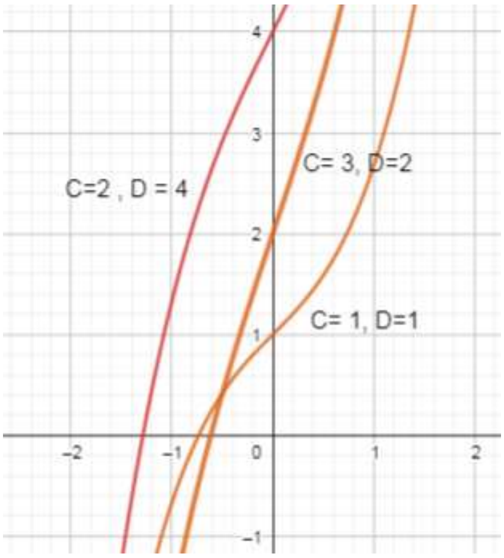
-Integral kedua dari hasil Integral yang pertama

$$\int \frac{dy}{dx} = \int (2x^2 + C)\, dx$$

-Maka didapat solusi umum dari PD

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 + Cx + D$$

-Solusi khusus dari PD tergantung dengan nilai C dan D. Pada grafik di bawah ini diperlihatkan untuk nilai C=2, D=4; C=3, D=2 dan C=1, D=1



Latihan :

1. Tentukan bentuk PD dari masing – masing primitif berikut ini :

1. $y = C_1 \sin x + C_2.x$
2. $(x - c)^2 + y^2 = R^2$
3. $x = A \sin (y + B)$
4. $\ln y = A.x^2 + B$
5. $y = A + B.e^{x+C}$

2. Tentukan solusi umum dari PD dibawah ini:

a. $y'' + 4y = 0$

b. $y' = 2 \sin y + 1$

c. $y'' = x\, e^x$

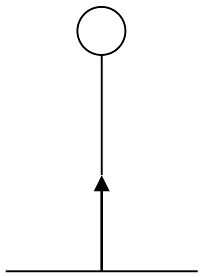
d. $y^{(4)} = 2x$

e. $y' = x^2 \ln x$

1.5. Persamaan Diferensial Dan Beberapa Aplikasinya

a. Bidang Fisika

Bila sebuah bola dilemparkan ke atas, maka berapa ketinggian maksimum yang dapat dicapai oleh bola tersebut ? Untuk menyelesaikan persoalan ini, kita abaikan massa bola, serta gesekan udara dan pengaruh angin.



$x_{(t)}$ = tinggi bola pada saat t , bola mempunyai kecepatan awal v, dan dianggap bergerak dari ketinggian nol

Gambar 1.1 Lintasan Sebuah Bola

Karena bola hanya dipengaruhi oleh percepatan gravitasi bumi, maka bola akan bergerak diperlambat dengan percepatan :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \qquad (1.11)$$

Mengintegralkan persamaan (1.11) dari 0 sampai t, serta mengingat kondisi awal bahwa kecepatan awal = v ($x'_{(0)} = 0$), maka diperoleh :

$$\frac{dx}{dt} - v = -gt \quad \text{atau} \quad \frac{dx}{dt} = v - gt \qquad (1.12)$$

Integralkan kembali persamaan (1.12), serta mengingat syarat ($x_{(0)} = 0$), akan dihasilkan persamaan gerak $x_{(t)}$.

$$\int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^t (v - gt) dt$$

$$x_{(t)} = vt - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (1.13)$$

Untuk mencari ketinggian maksimum dari bola tersebut, maka persamaan (1.12) kita samakan dengan nol (dengan logika bahwa pada ketinggian maksimum kecepatan akan sama dengan nol). Maka diperoleh nilai t = v/g, yang bila disubstitusikan ke persamaan (1.13), akan diketahui tinggi maksimum dari bola tersebut :

$$x_{maks} = v\left(\frac{v}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g} \qquad (1.14)$$

b. Bidang Kependudukan

Bila diketahui bahwa fungsi $N_{(t)}$ adalah jumlah individu dalam sebuah populasi pada waktu *t*. Dan diketahui pula bahwa laju pertambahan populasi dalam tiap waktu adalah berbanding lurus dengan jumlah populasi pada waktu tersebut. Maka bila diterjemahkan dalam bahasa Matematika :

$$\frac{dN_{(t)}}{dt} = k.N_{(t)} \qquad (1.15)$$

Dengan k adalah suatu konstanta sembarang, persamaan (1.15) dapat disusun sebagai berikut :

$$\frac{dN_{(t)}}{N_{(t)}} = k.dt \qquad (1.16)$$

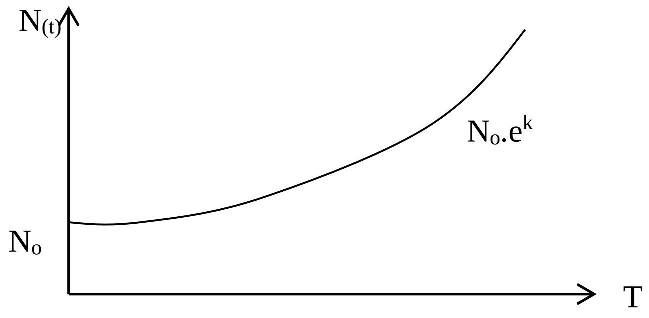
Mengintegralkan persamaan (1.16) dalam selang waktu 0 sampai t, serta bila diketahui pada saat t = 0 $N_{(t)} = N_0$.

$$\int_0^t \frac{dN_{(t)}}{N_{(t)}} = \int_0^t k.dt$$

$$\ln N(t) - \ln No = k.t$$

$$\ln \frac{N_{(t)}}{N_0} = k.t \quad \text{atau} \quad N_{(t)} = N_0.e^{kt} \qquad (1.17)$$

Persamaan (1.17) menyatakan jumlah populasi untuk setiap waktu t, grafik fungsi N(t) terlihat dalam gambar 1.2 di bawah ini.



Gambar 1.2 Grafik fungsi jumlah penduduk dari suatu populasi.

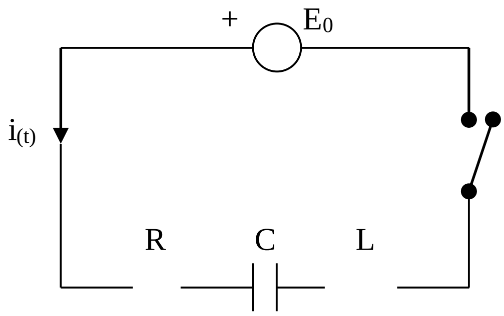
c. Bidang Elektronika

Dalam bidang elektronika sering dijumpai suatu rangkaian listrik, seperti pada gambar 1.3, yang terdiri dari sebuah sumber daya E, resistor (R), induktor (L) dan kapasitor (C). Bila sumber daya mempunyai voltase sebesar E_0, maka arus $i_{(t)}$ akan mengalir melalui resistor yang menimbulkan voltase sebesar i.R, dan melalui induktor yang menimbulkan voltase sebesar L.di/dt serta melalui kapasitor sebesar $\int_0^t \frac{i}{C} dt$. Sehingga sesuai Hukum Kirchoff :

$$L.\frac{di}{dt} + R.i + \int_0^t \frac{i}{C} dt = E_0 \qquad (1.18)$$

Bila kita diferensiasikan satu kali ke t maka akan diperoleh :

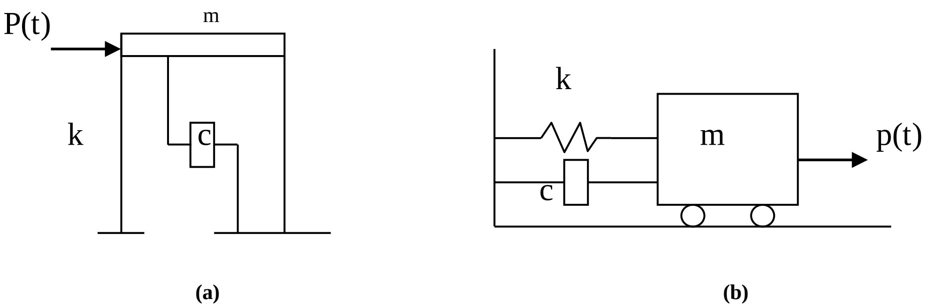
$$L.\frac{d^2i}{dt^2} + R.\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \qquad (1.19)$$



Gb. 1.3 Rangkaian R-L-C

d. Bidang Teknik Sipil

Sekarang kita tinjau sebuah struktur portal sederhana seperti pada gambar 1.4(a), struktur ini memiliki massa m, kekakuan k dan redaman sebesar c, struktur menerima beban dinamis p(t). Dan bila dimodelkan akan nampak seperti dalam gambar 1.4(b)



Gb. 1.4 Struktur Portal Dengan Model Matematisnya

Maka persamaan gerak fungsi waktu dari sistem di atas, dirumuskan :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + c.\frac{dx}{dt} + k.x = p(t) \quad \text{atau} \quad m.\ddot{x} + c.\dot{x} + kx = p(t) \qquad (1.20)$$

Masih banyak lagi aplikasi persamaan diferensial dalam berbagai bidang, yang menjadi perhatian sekarang adalah bagaimana menyelesaikan atau menemukan solusi dari suatu persamaan diferensial yang sudah diketahui tersebut.

Soal - soal :

Soal nomor 1 - 14, tunjukkanlah bahwa masing – masing persamaan yang diberikan berikut ini merupakan solusi / primitif dari PD terkait :

1. $(x – C)^2 + y^2 = r^2$; $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$
2. $y = C_1.x^2 + C_2.x + C_3$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$
3. $y^2 – C.x = 0$; $y = 2y\frac{dy}{dx}$
4. $y = C_1.\cos kx + C_2.\sin kx$; $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$
5. $y(t) = 2 \cosh 2t – 3 \sinh 2t$; $y''(t) – 4y(t) = 0$
6. $(x – a)^2 + (y – b)^2 = C^2$; $(1 + (y')^2)^3 = (C.y'')^2$
7. $w(x) = x$; $x^2.w''(x)+ x.w'(x) – w(x) = 0$
8. $w(s) = e^s(1 + \ln s)$; $s.w''(s) + (1 – s).w'(s) – w(s) = e^s$
9. $u(s) = e^{2s}(5s – 4)$; $u''(s) + u(s) = 25s.e^{2s}$
10. $x^2 + y^2 = a^2$; $y(x) = x.y'(x) + a\sqrt{1+(y'(x))^2}$
11. $z^2 = c.y^2 + c^2$; $y^2.(z(y) – y.z'(y)) = z(y).(z'(y))^2$

12. $v(x) = \exp(x^2/2).\cos x$; $v''(x) - 2.x.v'(x) + x^2.v(x) = 0$

13. $r(\theta) = \cos\theta.\cot\theta - \sin\theta$; $r''(\theta) + 2.r'(\theta)\cot\theta + 3.r(\theta) = 0$

14. $w(\theta) = A.\sec\theta + B(\sin\theta + \theta\sec\theta)$; $w''(\theta) - (1 + 2\tan^2\theta)w(\theta) = 0$

Soal nomor 15 - 25 , bentuklah PD terkait dari masing – masing persamaan yang diberikan :

BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDO SATU DERAJAT SATU

2.1. Definisi

Suatu persamaan diferensial disebut berordo satu dan derajat satu, berarti bahwa di dalam PD tersebut hanya terdapat bentuk $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^m$, dimana n dan m adalah sama dengan satu. Dalam bentuk umum, PD ordo satu derajat satu dapat dituliskan secara implisit sebagai berikut :

$$F(x, y, y') = 0$$

Atau $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

Atau $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ (2.1)

Dan untuk selanjutnya, setiap PD ordo satu derajat satu dapat dituliskan :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.2)$$

Contoh :

$$(1 + x + y + xy)\,dx + dy = 0$$

dapat dituliskan pula dalam bentuk :

$$(1 + x)\,dx + \frac{dy}{(1+y)} = 0$$

dimana $M(x,y) = (1 + x)$, dan $N(x,y) = \frac{1}{(1+y)}$

Ada beberapa tipe dari PD ordo satu derajat satu, yang akan dipelajari dalam kuliah ini. Masing – masing memiliki bentuk yang khas, dan cara penyelesaiannya sendiri.

2.2. PD Dengan Variabel Yang Sudah Terpisah

Bentuk umum :

$$\mathbf{F(x)\,dx + G(y)\,dy = 0} \qquad (2.3)$$

Dengan mengintegralkan persamaan (2.3) tersebut, maka dengan mudah akan diperoleh primitif dari PD tersebut.

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = C \qquad (2.4)$$

Contoh :

Tentukan primitif dari suatu PD berikut :

$$2.x\ dx + 4y^2\ dy = 0$$

Maka bila diintegralkan :

$$\int 2.x.dx + \int 4.y^2.dy = C$$

Akan diperoleh primitif PD yaitu : $x^2 + \frac{4}{3}.y^3 = C$

2.3. PD Dengan Variabel Yang Bisa Dipisah

Bentuk umum PD ini adalah :

$$\mathbf{F(x)G(y)dx + H(x)K(y)dy = 0} \qquad (2.5)$$

Maka untuk mencari primitifnya, terlebih dahulu harus kita pisahkan fungsi-fungsinya. Dengan membagi persamaan (2.5) dengan {G(y).H(x)}:

$$\underline{F(x)G(y)dx + H(x)K(y)dy = 0} \quad \text{bagi dengan } \{G(y)H(x)\}$$

$$\frac{F(x)}{H(x)}dx + \frac{K(y)}{G(y)}dy = 0 \qquad (2.6)$$

Dalam persamaan (2.6) variabel x dan y sudah terpisahkan, dan primitif dapat diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (2.6).

$$\int \frac{F(x)}{H(x)}dx + \int \frac{K(y)}{G(y)}dy = C \qquad (2.7)$$

Contoh :

Tentukan primitif dari PD :

$$y\ dx + x\ dy = 0$$

Bila kita bagi dengan (x.y), maka dapat diperoleh bentuk :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

Dan bila diintegralkan :

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = K$$

$$\ln x + \ln y = \ln e^K$$

primitif : $x.y = e^K$, atau boleh juga ditulis dalam bentuk $x.y = C$, karena e^K adalah merupakan suatu konstan.

2.4. PD Homogen

Bentuk umum :

$$\mathbf{F(\frac{y}{x})\ dx + G(\frac{y}{x})\ dy = 0} \qquad (2.8)$$

Untuk mencari primitifnya, maka kita perlu melakukan substitusi dengan memisalkan

$$\frac{y}{x} = u$$

Sehingga dapat diperoleh pula $dy = u.dx + x.du$, dan bila disubstitusikan ke persamaan (2.8) :

$$F(u)dx + G(u)(u.dx + x.du) = 0$$

$$F(u)dx + u.G(u).dx + x.G(u).du = 0$$

$$\{ F(u) + u.G(u) \}\ dx + x.G(u).du = 0$$

Bila dibagi dengan $x.\{ F(u) + u.G(u) \}$ akan menjadi :

$$\frac{dx}{x} + \frac{G(u).du}{F(u) + u.G(u)} = 0 \qquad (2.9)$$

Dan primitifnya diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (2.9), serta substitusikan kembali bahwa $u = y/x$,

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{G(u).du}{F(u) + u.G(u)} = C \qquad (2.10)$$

Contoh :

1. Tentukan primitif dari suatu PD berikut :

$$\left(2.x.\sinh \frac{y}{x} + 3.y.\cosh \frac{y}{x} \right) dx - 3.x \cosh \frac{y}{x}\ dy = 0$$

Bila kita bagi dengan x maka PD akan menjadi :

$$(2.\sinh \frac{y}{x} + 3.\frac{y}{x}.\cosh\frac{y}{x})\,dx - 3.\cosh\frac{y}{x}\,dy = 0$$

Substitusikan u = y/x dan bahwa dy = u.dx + x.du

$$(2.\sinh u + 3.u.\cosh u)\,dx - 3\cosh u\,(u.dx + x.du) = 0$$

$$(2.\sinh u + 3u.\cosh u - 3.u.\cosh u)\,dx - 3.x.\cosh u.\,du = 0$$

$$2.\sinh u\,dx - 3.x.\cosh u.du = 0$$

Bagi dengan { x. sinh u }

$$2.\frac{dx}{x} - 3\frac{\cosh u}{\sinh u}du = 0$$, dan bila diintegralkan

$$2\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{d(\sinh u)}{\sinh u} = K$$

$$2.\ln x - 3.\ln \sinh u = \ln C$$

$$\ln.x^2 - \ln \sinh^3 u = \ln C$$

$$\ln.\ x^2 = \ln(C.\sinh^3 u)$$

$x^2 = C.\ \sinh^3 u$, mengingat u = y/x, maka :

primitif : $x^2 = C.\sinh^3(y/x)$

2. Tentukan primitif dari PD :

$$x.dy - y.dx - (\sqrt{x^2 - y^2})dx = 0$$

Dibagi dengan x akan diperoleh bentuk :

$$dy - \frac{y}{x}dx - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx = 0$$

Substitusikan u = y/x dan dy = u.dx + x.du :

$$u.dx + x.du - u.dx - \sqrt{1-u^2}\,dx = 0$$

$$x.du - \sqrt{1-u^2}\,dx = 0$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \int\frac{dx}{x} = K$$

$$\sin^{-1} u - \ln.x = K$$

$\ln e^{\arcsin u} - \ln x = \ln C$

$\ln \dfrac{e^{\arcsin u}}{x} = \ln C$

$e^{\arcsin u} = C.x$, karena $u = y/x$

primitif : $e^{\arcsin (y/x)} = C.x$

2.5. PD Eksak

Bentuk umum dari PD ordo satu derajat satu adalah seperti persamaan (2.2) di atas :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.11)$$

Jika ada $M(x,y)dx + N(x,y)dy = d\mathbf{u}$, untuk suatu $\mathbf{u}(x,y)$, maka primitif dari (2.11) adalah $\mathbf{u}(x,y) = C$, suatu penyelesaian implisit. Untuk setiap $\mathbf{u}(x,y)$ maka turunan parsial pertamanya adalah

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy \qquad (2.12)$$

Yang bila diidentikkan dengan persamaan (2.11), $M(x,y) = u_x$ dan $N(x,y) = u_y$.

Jika turunan parsial kedua $u(x,y)$ kontinu maka dipenuhi hubungan $u_{xy} = u_{yx}$

Suatu PD ordo satu derajat satu didefinisikan sebagai PD Eksak, bila dipenuhi syarat :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2.13)$$

Contoh :

a. $(x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$

$M(x,y) = (x^2 - y)$ $\qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1$

$N(x,y) = (y^2 - x)$ $\qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1$

Karena $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, maka PD di atas dapat disebut sebagai PD Eksak

b. $(y^2 - x)dx + (x^2 - y)dy = 0$

$M(x,y) = (y^2 - x)$ $\qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$N(x,y) = (x^2 - y)$ $\qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, maka bukanlah merupakan PD Eksak.

Bagaimana sekarang, menyelesaikan suatu PD Eksak ?

Karena Eksak, maka jelas bahwa :

$$(1)\ u_x = M(x,y) \tag{2.14}$$

$$(2)\ u_y = N(x,y) \tag{2.15}$$

Berangkat dari (2.14), maka :

$$u(x,y) = \int_x M(x,y)dx + \phi(y) \tag{2.16}$$

Di mana $\phi(y)$ merupakan suatu fungsi sembarang dari y, anggaplah hasil integral tersebut adalah Q(x,y), sehingga :

$$u(x,y) = Q(x,y) + \phi(y) \tag{2.17}$$

Dan bila dideferensialkan parsial sekali lagi ke y akan diperoleh bentuk :

$$u_y(x,y) = Q_y(x,y) + \phi'(y) \tag{2.18}$$

Mengingat bahwa $N(x,y) = u_y(x,y)$, maka $\phi(y)$ ditentukan dari hubungan :

$$u_y(x,y) = Q_y(x,y) + \phi'(y) = N(x,y) \tag{2.19}$$

Dan primitif PD (2.11) adalah :

$$Q(x,y) + \phi(y) = C \tag{2.20}$$

Primitif dapat pula diperoleh bila kita bertolak dari (2.15):

$$u(x,y) = \int_y N(x,y)dy + \xi(x) \tag{2.21}$$

Di mana $\xi(x)$ merupakan suatu fungsi sembarang dari x, anggaplah hasil integral tersebut adalah P(x,y), sehingga :

$$u(x,y) = P(x,y) + \xi(x) \tag{2.22}$$

Dan bila dideferensialkan parsial sekali lagi ke x akan diperoleh bentuk :

$$u_x(x,y) = P_x(x,y) + \xi'(x) \tag{2.23}$$

Mengingat bahwa $M(x,y) = u_x(x,y)$, maka $\xi(x)$ ditentukan dari hubungan :

$$u_x(x,y) = P_y(x,y) + \xi'(y) = M(x,y) \tag{2.24}$$

Dan primitif PD (2.11) adalah :

$$P(x,y) + \xi(x) = C \qquad (2.25)$$

Hasil yang diperoleh dari kedua cara ini tentunya haruslah sama. Namun perlu diketahui di sini bahwa ada kemungkinan cara yang satu lebih mudah dari cara yang lain.

Contoh :

1. Diberikan PD :

$$(4x^3y^3 – 2xy) dx + (3x^4y^2 – x^2) dy = 0$$

Tunjukkan apakah PD tersebut Eksak atau bukan, carilah primitifnya !

$$M(x,y) = 4x^3y^3 – 2xy \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x$$

$$N(x,y) = 3x^4y^2 – x^2 \;\rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = 12x^3y^2 - 2x$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, jelas bahwa PD tersebut merupakan PD Eksak.

Bila u(x,y) primitif PD tersebut maka sesuai (2.16)

$$u(x,y) = \int_x M(x,y)dx + \phi(y) = \int_x (4x^3y^3 - 2xy)dx + \phi(y)$$

$u(x,y) = x^4y^3 – x^2y + \phi(y)$

$u_y(x,y) = 3x^4y^2 – x^2 + \phi'(y)$ dan ini harus sama dengan N(x,y)

$N(x,y) = 3x^4y^2 – x^2 = 3x^4y^2 – x^2 + \phi'(y)$

Jadi $\phi'(y) = 0$ atau $\phi(y) = C_1$

$u(x,y) = x^4y^3 – x^2y + C_1$

Dan primitif adalah u(x,y) = C

$x^4y^3 – x^2y + C_1 = C$ atau $\mathbf{x^4y^3 – x^2y = K}$

Persoalan dapat pula diselesaikan dengan persamaan (2.21)

$$u(x,y) = \int_y N(x,y)dy + \xi(x) = \int_y (3x^4y^2 - x^2)dy + \xi(x)$$

$u(x,y) = x^4y^3 – x^2y + \xi(x)$

$u_x(x,y) = 4x^3y^3 – 2xy + \xi'(x)$, yang harus sama dengan M(x,y)

$M(x,y) = 4x^3y^3 – 2xy = 4x^3y^3 – 2xy + \xi'(x)$

Diperoleh bahwa $\xi'(x) = 0$ atau $\xi(x) = C_1$

$u(x,y) = x^4y^3 - x^2y + C_1$

Dan primitif adalah $u(x,y) = C$

$x^4y^3 - x^2y + C_1 = C$ atau $\mathbf{x^4y^3 - x^2y = K}$

Terbukti bahwa baik melalui (2.16) maupun (2.21) akan memberikan suatu solusi yang sama.

2. Diberikan suatu PD :

$$(x^2y \cos y)\, dy + 2x(y \sin y + \cos y)\, dx = 0$$

Tunjukkan bahwa PD adalah Eksak, dan cari solusinya.

$$M(x,y) = 2x(y\sin y + \cos y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy\cos y$$

$$N(x,y) = x^2y \cos y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy\cos y$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, jelas bahwa PD tersebut merupakan PD Eksak.

Untuk mencari solusi kiranya akan lebih mudah melalui persamaan (2.16), karena bila kita memilih cara (2.21) akan menemui sedikit kesulitan dengan bentuk integral parsial yang muncul.

$$u(x,y) = \int_x M(x,y)dx + \phi(y) = \int_x 2x(y\sin y + \cos y)dx + \phi(y)$$

$u(x,y) = x^2(y \sin y + \cos y) + \phi(y)$

$u_y(x,y) = x^2y \cos y + \phi'(y)$ dan ini harus sama dengan $N(x,y)$

$N(x,y) = x^2y \cos y = x^2y \cos y + \phi'(y)$

Jadi $\phi'(y) = 0$ atau $\phi(y) = C_1$

$u(x,y) = x^2(y \sin y + \cos y) + C_1$

Dan primitif adalah $u(x,y) = C$

$x^2(y \sin y + \cos y) + C_1 = C$ atau $\mathbf{x^2(y \sin y + \cos y) = K}$

Dapat saja dicoba menyelesaikannya melalui persamaan (2.21)

Coba dikaji beberapa bentuk PD yang disajikan berikut :

1. $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\, dy = 0$

2. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
3. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x) dy = 0$

Apakah ketiga PD tersebut merupakan PD Eksak, baiklah bila kita tinjau satu persatu :

1. $(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0$

   $M(x,y) = x^2 + y^2 + x \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$

   $N(x,y) = xy \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = y$

   Jelas bukan PD eksak, namun coba bila PD kita kalikan dengan **x**, maka akan menjadi :

   $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y dy = 0$

   $M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2 \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy$

   $N(x,y) = x^2y \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy$

   PD menjadi Eksak

2. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

   $M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$

   $N(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$

   Bukan merupakan PD Eksak, sekarang bila kita kalikan dengan y^{-4}

   PD menjadi :

   $(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})dx + (x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4})dy = 0$

   $M(x,y) = 2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3} \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y - 2xy^{-2} - 3y^{-4}$

   $N(x,y) = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4} \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xe^y - 2xy^{-2} - 3y^{-4}$

   PD menjadi PD Eksak.

3. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x) dy = 0$

$M(x,y) = 2x^3y^2 - y \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^3y - 1$

$N(x,y) = 2x^2y^3 - x \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3 - 1$

PD bukan merupakan PD Eksak, dan bila dikalikan dengan $\dfrac{1}{x^2y^2}$

$(2x - x^{-2}y^{-1}) dx + (2y - x^{-1}y^{-2}) dy = 0$

$M(x,y) = 2x - x^{-2}y^{-1} \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = x^{-2}y^{-2}$

$N(x,y) = 2y - x^{-1}y^{-2} \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = x^{-2}y^{-2}$

Dan PD pun menjadi PD Eksak.

Dapat disimpulkan bahwa suatu PD Eksak dapat dibuat menjadi PD Eksak dengan jalan mengalikannya dengan suatu fungsi. Fungsi pengali yang membuat PD tidak eksak menjadi suatu PD Eksak tersebut dikenal dengan **Faktor Integral** (*Integrating Factor*). Dalam contoh di atas fungsi : x, y^{-4} dan x^{-2} y^{-2}, merupakan Faktor Integral dari masing–masing PD bersangkutan.

Dari contoh di atas, dapat diketahui bahwa secara umum, Faktor Integral ada tiga macam, yaitu :

1. Merupakan fungsi dari x saja, misalkan disebut $\mu(x)$
2. Merupakan fungsi dari y saja, misalkan disebut $\mu(y)$
3. Merupakan fungsi x dan y, misalkan disebut $\mu(x,y)$

A. A. Faktor Integral merupakan fungsi dari x saja, yaitu $\mu(x)$

Misalkan suatu PD : M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0, diketahui bukan merupakan PD Eksak. Namun mempunyai Faktor Integral yang merupakan fungsi dari x saja.

$$\mu(x)M (x,y) dx + \mu(x)N (x,y) dy = 0 \qquad (2.26)$$

Dan PD (2.26) pun menjadi suatu PD Eksak, berarti berlaku hubungan :

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\mu(x)M(x,y)\} = \frac{\partial}{\partial x}\{\mu(x)N(x,y)\} \qquad (2.27)$$

Bila persamaan (2.27) kita kerjakan akan memberi bentuk :

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x)}{\partial y} + \mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial\mu(x)}{\partial x} + \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2.28)$$

Karena $\frac{\partial\mu(x)}{\partial y}$ = 0, maka persamaan (2.28) dapat disusun dalam bentuk :

$$\mu(x)\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\} = N\frac{\partial\mu(x)}{\partial x} \qquad (2.29)$$

$$\frac{\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\}}{N}\partial x = \frac{\partial\mu(x)}{\mu(x)} \qquad (2.30)$$

Apabila bentuk $\frac{\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\}}{N}$ kita singkat dengan g(x), dan dengan mengintegralkan kedua ruas dari persamaan (2.30), maka akan diperoleh bentuk :

$$\int\frac{\partial\mu(x)}{\partial x} = \int g(x)dx \qquad (2.31)$$

Dan : $\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$ (2.32)

Contoh :

Diberikan PD :(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0, selidikilah apakah PD Eksak atau bukan, bila bukan carilah Faktor Integralnya, dan cari primitifnya !

M(x,y) = x^2 + y^2 + x $\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

N(x,y) = xy $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} = g(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{\int\frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

Sudah diperoleh faktor integralnya adalah $\mu(x) = x$; coba dicek kebenarannya :

PD menjadi : $(x^3 - xy^2 + x)\,dx + x^2y\,dy = 0$

$M(x,y) = x^3 - xy^2 + x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$

$N(x,y) = x^2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$

PD sudah menjadi Eksak, dan tinggal mencari primitifnya.

$$u(x,y) = \int_y N(x,y)dy + \xi(x) = \int_y x^2 y dy + \xi(x)$$

$u(x,y) = ½\, x^2y^2 + \xi(x)$

$u_x(x,y) = xy^2 + \xi'(x)$, yang harus sama dengan $M(x,y)$

$M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2 = xy^2 + \xi'(x)$

Diperoleh bahwa $\xi'(x) = x^3 + x^2$

$$\xi(x) = \int (x^3 + x^2)dx$$

$$\xi(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1$$

Dan primitif adalah $u(x,y) = C$

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1 = C \qquad \text{atau} \qquad \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 = K_1$$

atau dapat pula ditulis : $\mathbf{6x^2y^2 + 3x^4 + 4x^3 = K}$

B. Faktor Integral merupakan fungsi dari y saja, yaitu $\mu(y)$

Misalkan suatu PD : $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, diketahui bukan merupakan PD Eksak. Namun mempunyai Faktor Integral yang merupakan fungsi dari y saja.

$$\mu(y)M(x,y)\,dx + \mu(y)N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.33)$$

Dan PD (2.33) pun menjadi suatu PD Eksak, berarti berlaku hubungan :

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\mu(y)M(x,y)\} = \frac{\partial}{\partial x}\{\mu(y)N(x,y)\} \qquad (2.34)$$

Bila persamaan (2.34) kita kerjakan akan memberi bentuk :

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} + \mu(y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial\mu(y)}{\partial x} + \mu(y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2.35)$$

Karena $\frac{\partial\mu(y)}{\partial x} = 0$, maka persamaan (2.35) dapat disusun dalam bentuk :

$$\mu(y)\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\} = -M\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} \qquad (2.36)$$

$$-\frac{\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\}}{M}\partial y = \frac{\partial\mu(y)}{\mu(y)} \qquad (2.37)$$

Apabila bentuk $\frac{\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right\}}{N}$ kita singkat dengan h(y), dan dengan mengintegralkan kedua ruas dari persamaan (2.37), maka akan diperoleh bentuk :

$$\int\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} = -\int h(y)dy \qquad (2.38)$$

Dan : $\mu(y) = e^{-\int h(y)dy}$ (2.39)

Contoh :

Periksa apakah PD berikut eksak atau bukan, bila bukan, carilah faktor integralnya dan selesaikan !

$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y4e^y – x^2y^2 – 3x)dy = 0$

$M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$

$N(x,y) = x^2y^4e^y – x^2y^2 – 3x$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, maka bukan merupakan PD Eksak.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{8xy^3e^y+8xy^2+4}{2xy^4e^y+2xy^3+y}=\frac{4(2xy^3e^y+2xy^2+1)}{y(2xy^3e^y+2xy^2+1)}=\frac{4}{y}$$

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{4}{y}dy}=e^{-4\ln y}=y^{-4}$$

Bila kita kalikan faktor integral ini dengan PD semula akan diperoleh :

$(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})dx + (x^2e^y – x^2y^{-2} – 3xy^{-4})dy = 0$

$M(x,y) = 2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3}$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=2xe^y-2xy^{-2}-3y^{-4}$

$N(x,y) = x^2e^y – x^2y^{-2} – 3xy^{-4}$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xe^y-2xy^{-2}-3y^{-4}$

PD pun sudah menjadi eksak, dan sekarang tinggal mencari primitifnya :

$$u(x,y)=\int_y\left(x^2e^y-x^2y^{-2}-3xy^{-4}\right)dy+\xi(x)$$

$$u(x,y)=x^2e^y+x^2y^{-1}+xy^{-3}+\xi(x)$$

$u_x(x,y)=2xe^y+2xy^{-1}+y^{-3}+\xi'(x)$ dan ini harus sama dengan M(x,y)

$M(x,y) = 2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3} = 2xe^y+2xy^{-1}+y^{-3}+\xi'(x)$

Yang memberikan $\xi(x) = C_1$

Primitif PD adalah u(x,y) = C

$x^2e^y+x^2y^{-1}+xy^{-3}+C_1=C$ atau $x^2e^y+x^2y^{-1}+xy^{-3}=K$

atau $\mathbf{x^2e^y + x^2y^{-1} + xy^{-3} = K}$

C. Faktor Integral merupakan fungsi dari x dan y, yaitu $\mu(x,y)$

Misalkan suatu PD : M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0, diketahui bukan merupakan PD Eksak. Namun mempunyai Faktor Integral yang merupakan fungsi dari x & y

$$\mu(x,y)M (x,y) dx + \mu(x,y)N (x,y) dy = 0 \qquad (2.40)$$

Dan PD (2.40) pun menjadi suatu PD Eksak, berarti berlaku hubungan :

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\mu(x,y)M(x,y)\} = \frac{\partial}{\partial x}\{\mu(x,y)N(x,y)\} \qquad (2.41)$$

Bila persamaan (2.41) kita kerjakan akan memberi bentuk :

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} + \mu(y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} + \mu(y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2.42)$$

Persamaan (2.42) merupakan bentuk PD parsial. Dan di sini hanya akan dibahas fungsi – fungsi sederhana saja dari x dan y

Kasus I : bila μ fungsi dari x + y, μ(x + y)

Persamaan (2.42) dapat disusun kembali :

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} \qquad (2.43)$$

Bila kita misalkan (x + y) = z, serta mengingat **teorema aturan rantai** :

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (2.44)$$

Maka dengan mudah dapat ditentukan :

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial z} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial z} \qquad (2.45)$$

Substitusikan (2.45) ke (2.43), akan diperoleh :

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = (N - M)\frac{\partial\mu}{\partial z} \qquad (2.46)$$

$$\int\frac{\partial\mu}{\mu} = \int\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N - M}dz \qquad (2.47)$$

Kasus II : bila μ fungsi dari xy, μ(xy)

Bila kita misalkan (xy) = z, serta melihat persamaan (2.44), dapatlah kiranya ditentukan bahwa :

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial z}.y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial z}.x \qquad (2.48)$$

Substitusikan (2.48) ke (2.43), akan diperoleh :

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=(N.y-M.x)\frac{\partial \mu}{\partial z} \qquad (2.49)$$

$$\int\frac{\partial \mu}{\mu}=\int\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N.y-M.x}dz \qquad (2.50)$$

2.6. PD Dengan Bentuk : y.f(xy) dx + x.g(xy) dy = 0

Dalam PD bentuk ini, f(xy) dan g(xy) merupakan suatu fungsi x kali y, dan xy senantiasa muncul berpasangan.

Contoh : f(xy) = $\frac{1}{x^2y^2}+(xy)^2+4(xy)^{-2}$

Misalkan ada suatu PD berbentuk :

$$\mathbf{y.f(xy)\,dx + x.g(xy)\,dy = 0} \qquad (2.51)$$

Maka untuk menyelesaikan PD bentuk ini kita perlu lakukan substitusi sebagai berikut :

Misalkan : u = xy,

Sehingga $y=\frac{u}{x}$ dan $dy=\frac{x.du-u.dx}{x^2}$ (2.52)

Substitusikan (2.52) ke (2.51) :

$$\frac{u}{x}f(u)dx+x.g(u)\left\{\frac{x.du-u.dx}{x^2}\right\}=0 \qquad (2.53)$$

$$u.f(u)dx+g(u)(x.du-u.dx)=0$$

$$(u.f(u)-u.g(u))dx+x.g(u)du=0$$

Dan bila kita pisahkan variabel u dan x, maka :

$$\frac{dx}{x}+\frac{g(u).du}{u.f(u)-u.g(u)}=0$$

Mengintegralkan persamaan di atas akan diperoleh :

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{g(u)du}{u.f(u)-u.g(u)}=C \qquad (2.54)$$

Substitusikan kembali u = xy, dan primitifnya adalah **F(x,xy) = C**

Contoh:

1. Diberikan PD: $y (xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0$, tentukan primitifnya !

Substitusi: $xy = u$; $y = \frac{u}{x}$ dan $dy = \frac{x.du - u.dx}{x^2}$,

$$\frac{u}{x}(u+1)dx + x(1+u+u^2)\left\{\frac{x.du - u.dx}{x^2}\right\} = 0$$

$$u (u + 1)dx + (1 + u + u^2)(x.du – u.dx) = 0$$

$$- u^3\, dx + (1 + u + u^2)\, x.du = 0$$

$$-\frac{dx}{x} + \frac{1+u+u^2}{u^3}du = 0$$

Bila diintegralkan :

$$-\int\frac{dx}{x} + \int(u^{-3} + u^{-2} + u^{-1})du = C$$

$$-\ln x - \frac{1}{2}u^{-2} - u^{-1} + \ln u = C$$

Substitusikan kembali $u = xy$;

$$-\ln x - \frac{1}{2}(xy)^{-2} - (xy)^{-1} + \ln(xy) = C$$

2. Diberikan PD : $(1 – xy + x^2y^2)dx + (x^3y – x^2)dy = 0$, tentukan primitifnya !

Bila PD kita kalikan dengan y, maka akan berbentuk :

$$y.(1 – xy + x^2y^2)dx + x.(x^2y^2 – xy)dy = 0$$

Substitusi : $xy = u$; $y = \frac{u}{x}$ dan $dy = \frac{x.du - u.dx}{x^2}$

$$\frac{u}{x}(1-u-u^2)dx + x.(u^2-u)\left\{\frac{x.du - u.dx}{x^2}\right\} = 0$$

$$u(1-u-u^2)dx + (u^2-u)(x.du - u.dx) = 0$$

Bila dikelompokkan :

$$u.dx + (u^2 - u).x.du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2-u}{u}du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int (u-1)du = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2}u^2 - u = C$$

Substitusikan kembali $u = xy$

Primitifnya : $\ln x + \frac{1}{2}(xy)^2 - (xy) = C$

2.7. PD Dengan Bentuk Umum: ($a_1.x + b_1.y + c_1$)dx + ($a_2.x + b_2.y + c_2$) dy = 0

Dalam usaha penyelesaian PD bentuk ini akan dijumpai 3 kasus sebagai berikut :

Kasus I : $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$

Dari bentuk PD di atas maka akan didapat dua persamaan linear berikut :

$a_1.x + b_1.y + c_1 = 0$

$a_2.x + b_2.y + c_2 = 0$

Dan harga x dan y dapat dicari :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = h \quad \text{dan} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = k \qquad (2.55)$$

Lakukan substitusi :

$$\bar{x} = x - h \quad \rightarrow \quad dx = d\bar{x}$$

$$\bar{y} = y - k \quad \rightarrow \quad dy = d\bar{y} \qquad (2.56)$$

$$\{a_1(\bar{x}+h) + b_1(\bar{y}+k) + c_1\}d\bar{x} + \{a_2(\bar{x}+h) + b_2(\bar{y}+k) + c_2\}d\bar{y} = 0$$

$$\{(a_1.\bar{x} + b_1.\bar{y}) + a_1.h + b_1.k + c_1\}d\bar{x} + \{(a_2.\bar{x} + b_2.\bar{y}) + a_2.h + b_2.k + c_2\}d\bar{y} = 0$$

$$(2.57)$$

Mengingat bahwa : $\begin{cases} a_1.h + b_1.k + c_1 = 0 \\ a_2.h + b_2.k + c_2 = 0 \end{cases}$

Maka (2.57) dapat direduksi menjadi :

$$\{a_1.\bar{x}+b_1.\bar{y}\}d\bar{x}+\{a_2.\bar{x}+b_2.\bar{y}\}d\bar{y}=0 \qquad (2.58)$$

Bila dibagi dengan $\bar{x}$;

$$\left\{a_1+b_1.\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right\}d\bar{x}+\left\{a_2+b_2.\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right\}d\bar{y}=0 \qquad (2.59)$$

Persamaan (2.59) adalah seperti bentuk PD Homogen

Substitusikan : $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=u$; $\bar{y}=u.\bar{x}$ dan $d\bar{y}=u.d\bar{x}+\bar{x}.du$, yang menghasilkan :

$$\{a_1+b_1.u\}d\bar{x}+\{a_2+b_2.u\}(u.d\bar{x}+\bar{x}.du)=0 \qquad (2.60)$$

Bila dikelompokkan :

$$\{a_1+b_1.u+a_2.u+b_2.u^2\}d\bar{x}+\{a_2+b_2.u\}\bar{x}.du=0 \qquad (2.61)$$

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}+\frac{a_2+b_2.u}{a_1+b_1.u+a_2.u+b_2.u^2}du=0 \qquad (2.62)$$

Mengintegralkan persamaan (2.62)

$$\int\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}+\int\frac{a_2+b_2.u}{a_1+b_1.u+a_2.u+b_2.u^2}du=C \qquad (2.63)$$

Diperoleh primitif :

$$F(\bar{x},u)=C \quad\rightarrow\quad F\left(\bar{x},\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)=C \quad\rightarrow\quad F\left(x-h,\frac{y-k}{x-h}\right)=C$$

Kasus II : $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}\neq\frac{c_2}{c_1}$

Bila : $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=m$, akan dapat diperoleh hubungan :

$a_2 = m.a_1$ dan $b_2 = m.b_1$

Substitusikan ke PD :

$$\{(a_1.x+b_1.y)+c_1\}dx+\{m.(a_1.x+b_1.y)+c_2\}dy=0 \qquad (2.64)$$

Misalkan : $a_1.x + b_1.y = u$

$d(a_1.x + b_1.y) = du$

$$a_1.dx + b_1.dy \quad = du$$

$$dy = \frac{du - a_1.dx}{b_1}$$

Maka (2.64) akan menjadi :

$$\{u + c_1\}dx + (m.u + c_2)\left\{\frac{du - a_1.dx}{b_1}\right\} = 0$$

$$(b_1.u + b_1.c_1) \; dx + (m.u + c_2)(du - a_1.dx) = 0$$

$$dx + \frac{m.u + c_2}{b_1.u + b_1.c_1 - a_1.m.u - a_1.c_2} du = 0 \qquad (2.65)$$

Mengintegralkan persamaan (2.65) :

$$\int dx + \int \frac{m.u + c_2}{b_1.u + b_1.c_1 - a_1.m.u - a_1.c_2} du = 0 \qquad (2.66)$$

Diperoleh primitif :

$F(x, u) = C \quad \rightarrow \quad F (x, a_1.x+b_1.y) = C$

Kasus III : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$

Misalkan : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = m$, maka PD dapat dituliskan kembali dalam bentuk :

$$\{a_1.x + b_1.y + c_1\}dx + \{m(a_1.x + b_1.y + c_1)\}dy = 0 \qquad (2.67)$$

Bila kita bagi dengan ($a_1.x + b_1.y + c_1$), menjadikan (2.67) :

$dx + m.dy = 0$; yang integralnya adalah :

$$\int dx + m\int dy = C$$

Primitifnya : **$\mathbf{x + my = C}$** (2.68)

Contoh :

1. Diberikan PD : (6x – 2y – 7)dx + (-2x – 3y + 6)dy = 0

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \\ \frac{b_2}{b_1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow \text{kasus I}$$

Cari dulu h dan k :

$$h=\frac{\begin{vmatrix}7 & -2\\ -6 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -2\\ -2 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-21-12}{-18-4}=\frac{3}{2} \qquad h=\frac{\begin{vmatrix}6 & 7\\ -2 & -6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -2\\ -2 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-36+14}{-18-4}=1$$

Menggunakan persamaan (2.63)

$$\int \frac{d\bar{x}}{\bar{x}}+\int \frac{a_2+b_2.u}{a_1+b_1.u+a_2.u+b_2.u^2}\,du=C$$

$$\ln\bar{x}+\int\frac{-2-3u}{6-2u-2u-3u^2}\,du=C$$

$$\ln\bar{x}+\int\frac{-2-3u}{6-4u-3u^2}\,du=C$$

$$\ln\bar{x}+\frac{1}{2}\int\frac{d(6-4u-3u^2)}{6-4u-3u^2}=C$$

$$\ln\bar{x}+\frac{1}{2}\ln\left\{6-4u-3u^2\right\}=C$$

Substitusikan kembali :

$$\bar{x}=x-h=x-\frac{3}{2}$$

$$\bar{y}=y-k=y-1$$

Sehingga primitifnya:

$$\ln\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left\{6-4\left(\frac{y-1}{x-{}^{3}\!/_{2}}\right)-3\left(\frac{y-1}{x-{}^{3}\!/_{2}}\right)^2\right\}=C$$

Adakah cara lain yang lebih mudah untuk menyelesaikan PD ini ?

2. Diberikan PD : (x – 2y + 3)dx + (2x – 4y + 5)dy = 0

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=2\neq\frac{c_2}{c_1}\Rightarrow \text{kasus II}$$

Substitusi : $u = a_1x + b_1y = x - 2y$

Gunakan persamaan (2.66)

$$\int dx + \int \frac{m.u + c_2}{b_1.u + b_1.c_1 - a_1.m.u - a_1.c_2} du = 0$$

$$x + \int \frac{2u + 5}{-2u - 6 - 2u - 5} du = C$$

$$x + \int \frac{2u + 5}{-4u - 11} du = C$$

$$x - \frac{1}{2}\int du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{-4u - 11} = C$$

$$x - \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\int \frac{d(-4u - 11)}{(-4u - 11)} = C$$

$$x - \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\ln\{-4u - 11\} = C$$

Substitusikan $u = x - 2y$

Primitifnya : $x - \frac{1}{2}(x - 2y) + \frac{1}{8}\ln\{-4(x - 2y) - 11\} = C$

$$\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{8}\ln\{-4x + 8y - 11\} = C$$

3. Diberikan PD : $(2x - 3y + 5)dx + (6x - 9y + 15) dy = 0$

   $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = 3 \Rightarrow$ kasus III

   Gunakan persamaan (2.68)

   $x + my = C \quad \rightarrow$ primitifnya : $x + 3y = C$

Soal - soal :

Tentukanlah primitif dari masing – masing PD yang diberikan ini :

1. $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$
2. $(x^2 + y^2)dy + 2xydx = 0$
3. $e^{xy}(y.\cos x - \sin x)dx + x.e^{xy}\cos x\, dy = 0$
4. $(1 + y^2)dx + (x^2y + y)dy = 0$
5. $y\, dy - 4x\, dx = 0$
6. $y^2\, dy - 3x^5\, dx = 0$
7. $x^3y' = y^2 (x - 4)$
8. $(x - 2y)\, dy + (y + 4x)dx = 0$
9. $(2y^2 + 1)y' = 3x^2y$
10. $x.y'(2y - 1) = y (1 - x)$
11. $(x^2 + y^2)dx = 2xy\, dy$
12. $(x + y)dy = (x - y)dx$
13. $x(x + y)\, dy - y^2dx = 0$
14. $xdy - ydx + x.e^{y/x}\, dx = 0$
15. $dy = (3y + e^{2x})dx$
16. $x^2y^2dy = (1 - xy^3)dx$

17. $(\cot y + x^2)dx = x \operatorname{cosec}^2 y \, dy$
18. $e^{-\theta} dr - r.e^{-\theta} d\theta = 0$
19. $(\cos \pi x.\cos 2\pi y)dx = 2 \sin \pi x \sin 2\pi y \, dy$ $y(3/2) = ½$
20. $[e^x \cos y + 2(x - y)]dx = [e^x \sin y + 2(x - y)]dy$ $y(0) = \pi$
21. $2xy \, dx + 3x^2 \, dy = 0$
22. $x \operatorname{cosec} y \, dx + \cos y \, dy = 0$
23. $2 \cosh x \cos y \, dx = \sinh x \sin y \, dy$
24. $(3xe^y + 2y) dx + (x^2e^y + x) dy = 0$
25. $2x \tan y \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$
26. $\dot{x} + x \cot t = 2t \operatorname{cosec} t$
27. $dr = b(\cos \theta \, dr + r\sin \theta \, d\theta)$
28. $2w^2 t dt - 3w(t^2 - 1) dw = 0$
29. $y' = \cos x - y \sec x$; $y(0) = 1$
30. $xy' + y = 2x^2 y$; $y(1) = 1$
31. $m \, dn = (2m + 1)(dm - dn)$
32. $(5 + 2m - 4n)m' = 3 + m - 2n$
33. $2a^2 b' = 3b(b - 2)$
34. $t.z' + t + z = 0$; $t(2) = 1$
35. $y' = e^{2x - y}$
36. $y' + y(\ln x)(\ln y) = 0$
37. $r' - r \tan \theta = \cos 2\theta$; $r(\pi/6) = \sqrt{3/2}$
38. $r' - \sec^2\theta \cot r \cos r = 0$
39. $(uv^2 + u + v^2 + 1)du + (v - 1)dv = 0$
40. $(t2 + 1)dw + t(2w - 1)dt = 0$
41. $x^2 \, dy + y^2 dx = ydx + dy$
42. $(2 + 2\alpha + 3\beta)\beta' = 1 - 2\alpha - 3\beta$
43. $3x^3 y' = 2y(y - 3)$
44. $x^2 y' + y = xy$; $y(2) = 1$
45. $(\sin \theta)r' = - 1 - 2r \cos \theta$; $r(\pi/2) = 1$
46. $2s(t^2 - t)ds + (s^2 - 1)dt = 0$; $s(3) = 2$
47. $(e^{-y} \cos y - e^{-x} \sin x) dx + (e^{-x} \cos x - e^{-y} \sin y) dy = 0$
 Faktor Integral fungsi dari $(x + y)$
48. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$; Faktor Integral fungsi dari $(x.y)$
49. $x \, dx + y \, dy + 4y^3(x^2 + y^2)dy = 0$; Faktor Integral fungsi dari $(x^2 + y^2)$
50. $(2y + 3xy^3)dx + (3x + 5x^2y^2)dy = 0$; Faktor Integral fungsi dari xy^2

BAB III

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDO SATU DERAJAT LEBIH TINGGI

Telah dipelajari bersama, bagaimana bentuk – bentuk serta penyelesaian – penyelesaian dari suatu persamaan diferensial ordo satu dengan derajat satu. Dalam bab ini masih akan dibahas PD ordo satu, hanya saja mempunyai derajat yang lebih dari satu. Apakah yang dimaksud dengan PD ordo satu derajat lebih tinggi ? Artinya bahwa di dalam PD tersebut terdapat bentuk $\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^n$, dengan harga m = 1 dan harga n yang lebih dari satu (n > 1). PD bentuk ini secara umum dapat dilihat dalam persamaan (3.1) berikut ini :

$$\mathbf{A_0(x,y).p^n + A_1(x,y).p^{n-1} + A_2(x,y).p^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}.p + A_n(x,y) = 0} \qquad (3.1)$$

Dengan : n = bilangan bulat positif

$$p = \frac{dy}{dx}$$

Ada beberapa cara yang dapat ditempuh untuk menyelesaikan PD dalam persamaan (3.1) tersebut.

3.1. Penyelesaian ke – p

Bila kita cermati kembali persamaan (3.1), maka sebenarnya merupakan suatu deret polinomial dari p dengan derajat n, dan A_0, A_1, …. A_n, merupakan koefisiennya. Maka bila kita dapat menemukan akar – akar dari p, PD tersebut akan dapat diselesaikan dengan mudah. Hanya saja pada umumnya kesulitan datang dalam mencari akar – akar dari p tersebut.

Untuk menyelesaikan PD ini ada baiknya diingat kembali tentang teorema akar dari suatu polinomial berikut :

$$a_0.z^n + a_1.z^{n-1} + a_2.z^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}z + a_n = 0 \qquad (3.2)$$

Jika $\frac{\alpha}{\beta}$ merupakan akar dari (3.2) maka α adalah faktor dari a_n dan β adalah faktor dari a_0. Namun bila misalkan ϕ faktor dari a_n dan ξ faktor dari a_0, belum tentu $\frac{\phi}{\xi}$ merupakan akar dari (3.2).

Sekarang lihat kembali persamaan (3.1), misalkan :

$F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$, $F_3(x,y)$ ……$F_n(x,y)$ merupakan akar – akar dari

persamaan (3.1)

Maka persamaan (3.1) dapat disusun kembali dalam bentuk :

$$A_0(x,y)\ \{p - F_1(x,y)\}\{p - F_2(x,y)\}......\{p - F_n(x,y)\} = 0 \qquad (3.3)$$

Primitif dicari lewat :

$$\{p - F_1(x,y)\} = 0 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dy}{dx} - F_1(x,y) = 0 \qquad \rightarrow f_1(\ x,y,c\ ) = 0$$

$$\{p - F_2(x,y)\} = 0 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dy}{dx} - F_2(x,y) = 0 \qquad \rightarrow f_2(\ x,y,c\ ) = 0$$

………..

$$\{p - F_n(x,y)\} = 0 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dy}{dx} - F_n(x,y) = 0 \qquad \rightarrow f_n(\ x,y,c\ ) = 0$$

Sehingga primitif dari :

$$\mathbf{A_0(x,y).p^n + A_1(x,y).p^{n-1} + A_2(x,y).p^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}.p + A_n(x,y) = 0}$$

Adalah : $\mathbf{f_1(x,y,c).f_2(x,y,c)\ldots..f_n(x,y,c) = 0}$ (3.4)

Contoh :

Tentukanlah primitif dari PD berikut ini :

$$p^4 - (\ x + 2y + 1\ )p^3 + (\ x + 2y + 2xy\ )p^2 - 2xyp = 0$$

Bila akan diselesaikan ke – p, maka langkah – langkah untuk mencari primitif dari PD tersebut tentunya harus mencari akar dari persamaan tersebut. Yang jelas terlihat adalah bahwa p = 0 merupakan akar persamaan tersebut, sehingga persamaan dapat dituliskan lagi sebagai berikut :

$$p\{\ p^3 - (\ x + 2y + 1\ )p^2 + (\ x + 2y + 2xy\ )p - 2xy\ \} = 0$$

Sekarang kita perhatikan suku – 2xy, faktor dari – 2xy adalah :

1. – 1
2. 1
3. – 2
4. 2
5. – x
6. x
7. – y
8. y
9. – 2x
10. 2x
11. – 2y
12. 2y
13. – 2xy
14. 2xy

Akar dari persamaan $p^3 - (x + 2y + 1)p^2 + (x + 2y + 2xy)p - 2xy = 0$, tentulah salah satu dari ke –14 faktor (- 2xy).

Coba : $p = -1$

$$p^3 - (x + 2y + 1)p^2 + (x + 2y + 2xy)p - 2xy = 0$$

$$(-1)^3 - (x + 2y + 1)(-1)^2 + (x + 2y + 2xy)(-1) - 2xy \; (? = 0)$$

$$-1 - x - 2y - 1 - x - 2y - 2xy - 2xy \neq 0$$

(jadi p = -1 bukan akar dari persamaan tersebut)

Coba : $p = 1$

$$(1)^3 - (x + 2y + 1)(1)^2 + (x + 2y + 2xy)(1) - 2xy \; (? = 0)$$

$$1 - x - 2y - 1 + x + 2y + 2xy - 2xy = 0$$

(p = 1 merupakan akar persamaan tersebut)

Karena p = 1 merupaka akar persamaan maka dapat persamaan tersebut dapat ditulis :

$$(p - 1).\phi(x,y,p) = p^3 - (x + 2y + 1)p^2 + (x + 2y + 2xy)p - 2xy = 0$$

Dan $\phi(x, y, p) = \dfrac{p^3 - (x + 2y + 1)p^2 + (x + 2y + 2xy)p - 2xy}{(p - 1)}$

Lakukan pembagian biasa :

$$
\begin{array}{l|l|l}
(p-1) & p^3 - (x + 2y + 1)p^2 + (x + 2y + 2xy)p - 2xy & p^2 - p(x+2y) + 2xy \\
 & \underline{p^3 \quad - \quad p^2} \qquad - & \\
 & \quad -p^2(x + 2y) + (x + 2y + 2xy)p - 2xy & \\
 & \quad \underline{-p2(x + 2y) + (x + 2y)p} \qquad - & \\
 & \qquad\qquad 2xyp - 2xy & \\
 & \qquad\qquad \underline{2xyp - 2xy} \qquad - & \\
 & \qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh : $\phi(x,y,p) = p^2 - p(x + 2y) + 2xy$

Dan persamaan : $p^4 - (x + 2y +1)p^3 + (x + 2y + 2xy)p^2 - 2xyp = 0$, sekarang dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$p(p - 1)\{ p^2 - p(x + 2y) + 2xy \}= 0$$

Akar dari $p^2 - p(x + 2y) + 2xy = 0$, dapat dicari dengan mudah melalui teorema A.B.C :

$$p_{3,4} = \frac{x + 2y \pm \sqrt{(x+2y)^2 - 8xy}}{2}$$

Dan diperoleh : $p_3 = x$ serta $p_4 = 2y$

Karena akar – akar dari persamaan $p^4 - (x + 2y + 1)p^3 + (x + 2y + 2xy)p^2 - 2xyp = 0$, sudah ditemukan secara lengkap, maka kita susun lagi persamaan tersebut sebagai berikut

$$p(p - 1)(p - x)(p - 2y) = 0$$

Dapat dicek ulang apakah bentuk di atas sama dengan persamaan yang diberikan dalam soal.

Primitif dari masing – masing suku adalah :

$p = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\rightarrow y = C$	atau	$y - C = 0$	(i)
$p = 1$	$\frac{dy}{dx} = 1$	$\rightarrow y = x + C$	atau	$y - x - C = 0$	(ii)
$p = x$	$\frac{dy}{dx} = x$	$\rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + C_1$	atau	$2y - x^2 - C = 0$	(iii)
$p = 2y$	$\frac{dy}{dx} = 2y$	$\rightarrow \ln y = 2x + \ln C$	atau	$y - C.^{e2x} = 0$	(iv)

Dan akhirnya primitif dari $p^4 - (x + 2y + 1)p^3 + (x + 2y + 2xy)p^2 - 2xyp = 0$

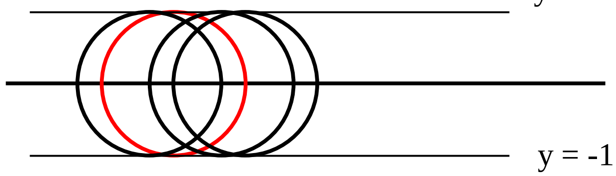
Adalah : $\mathbf{(y - C)(y - x - C)(2y - x^2 - C)(y - C.e^{2x}) = 0}$

3.2. Penyelesaian Singular

Di samping solusi umum dan solusi khusus, dalam penyelesaian PD ordo satu derajat tinggi ini akan ditemui juga penyelesaian singular. Misalkan bila diketahui suatu bentuk PD: $y^2p^2 + y^2 = 1$

Maka solusi umumnya : $(x - c)^2 + y^2 = 1$, yang merupakan suatu lingkaran berpusat di $(c,0)$ dengan jari – jari 1. Kita sebut sebagai L_1. Sekarang coba pikirkan suatu lingkaran lain L2 dengan persamaan : $(x - (c + \Delta x))^2 + y^2 = 1$, dengan $\Delta x \rightarrow 0$.

Titik – titik perpotongan L_1 dan L_2 bila $\Delta x \rightarrow 0$, disebut titik karakteristik. Tempat kedudukan titik – titik karakteristik ini disebut penyelesaian singular (PS).



Gb. 3.1 Penyelesaian Singular

Dalam gambar 3.1 ditunjukkan bahwa y =1 dan y = -1 adalah merupakan tempat kedudukan titik – titik potong lingkaran, dan y = 1 serta y = -1 merupakan penyelesaian singular dari PD : $y^2p^2 + y^2 = 1$.

Ada dua macam cara yang dapat ditempuh untuk mencari penyelesaian singular dari suatu PD ordo satu derajat tinggi, yaitu:

1. Dari PD $\phi(x,y,p) = 0$, carilah $\frac{\partial\phi}{\partial p} = 0$, dan eliminasilah p dari kedua persamaan ini

   Contoh : $y^2p^2 + y^2 = 1$

   $$\frac{\partial\phi}{\partial p} = 2y^2p = 0 \rightarrow p = 0$$

   eliminasi p ke PD akan diperoleh $y = \pm 1$

2. Dari PD $\phi(x,y,p) = 0$, cari primitifnya, misalkan primitif adalah $f(x,y,c) = 0$. Dari primitif tentukan $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$. Lakukan eliminasi C.

   Contoh : $y^2p^2 + y^2 = 1$

   Diperoleh primitif : $(x – c)^2 + y^2 = 1$

   $$\frac{\partial f}{\partial c} = -2(x – c) = 0 \quad \rightarrow c = 0$$

   Eliminasikan c ke primitif maka akan diperoleh penyelesaian singular $y = \pm 1$

3.3. Penyelesaian ke – y

Maksud penyelesaian ke – y adalah apabila PD yang diberikan dapat dinyatakan dalam bentuk : $y = f(x,p)$, dengan mengambil derivatif ke – x, akan didapatkan :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \rightarrow \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (3.5)$$

Persamaan (3.5) merupakan PD ordo satu derajat satu, dan dapat diselesaikan sehingga akan memberikan primitif $g(x,p,c) = 0$.

Dan penyelesaian umum dari PD diperoleh dengan mengeliminasi p dari :

PD : $y = f(x,p)$

$g(x,p,c) = 0$

Terkadang dijumpai dalam PD dinyatakan sebagai $y = f(p)$, dalam kasus ini variabel x tidak muncul. Ambil derivatif ke – x, maka akan didapat :

$$\frac{dy}{dx} = f'(p)\frac{dp}{dx} \qquad \rightarrow \qquad p = f'(p)\frac{dp}{dx} \qquad (3.6)$$

Persamaan tersebut merupakan PD ordo satu, yang akan memberikan primitif $x = \phi(p,c)$. dan penyelesaian umum dari PD didapat dengan eliminasi p dari :

$y = f(p)$

$x = \phi(p,c)$

Contoh :

Diberikan PD : $16x^2 + 2p^2y - p^3x = 0$

PD dapat ditulis sebagai : $2y = \dfrac{p^3x - 16x^2}{p^2} = px - 16x^2p^{-2}$

Derivatif ke x :

$$2\frac{dy}{dx} = (p - 32xp^{-2}) + (x + 32x^2p^{-3})\frac{dp}{dx} \qquad \text{, ganti } dy/dx = p$$

$$2p = (p - 32xp^{-2}) + (x + 32x^2p^{-3})\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (-p - 32xp^{-2}) + (x + 32x^2p^{-3})\frac{dp}{dx}$$

Kalikan dengan p^3

$$0 = (-p^4 - 32xp) + (xp^3 + 32x^2)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = -p(p^3 + 32x) + x(p^3 + 32x)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (p^3 + 32x)(-p + x\frac{dp}{dx})$$

Dari : $0 = (-p + x\frac{dp}{dx})$, akan memberikan harga p = k.x

Eliminasi p dari PD :

$16x^2 + 2(kx)^2y - (kx)^3x = 0$

$16x^2 + 2k^2x^2y - k^3x^4 = 0$ (bila k = 2C)

$16x^2 + 2y.4C^2x^2 - 8C^3x^4 = 0$

primitif : $\mathbf{2 + yC^2 - C^3x^2 = 0}$

Penyelesaian singular didapat dari : (p^3 + 32x) = 0, yang memberikan harga p = ($-32x^{1/3}$), subsitusikan ke PD dan didapat :

$\mathbf{16x^2 + 2y(-32x^{2/3}) + 32xy = 0}$

3.4. Penyelesaian ke – x

Maksud penyelesaian ke – x adalah apabila PD yang diberikan dapat dinyatakan dalam bentuk : x = f(y,p), dengan mengambil derivatif ke – y, akan didapatkan :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (3.7)$$

Persamaan (3.6) merupakan PD ordo satu derajat satu, dan dapat diselesaikan sehingga akan memberikan primitif h(y,p,c) = 0.

Dan penyelesaian umum dari PD diperoleh dengan mengeliminasi p dari :

PD : x = f(y,p)

g (y,p,c) = 0

Terkadang dijumpai PD yang dapat dinyatakan sebagai x = f(p), dalam kasus ini variabel y tidak muncul. Ambil derivatif ke – y, maka akan didapat :

$$\frac{dx}{dy} = f'(p)\frac{dp}{dy} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{p} = f'(p)\frac{dp}{dy} \qquad (3.8)$$

Persamaan tersebut merupakan PD ordo satu, yang akan memberikan primitif y = ξ(p,c). dan penyelesaian umum dari PD didapat dengan eliminasi p dari :

x = f(p)

$x = \xi(p,c)$

Contoh :

Diberikan PD : $y = 3px + 6p^2y^2$, tentukan primitifnya !

PD dapat ditulis dalam bentuk :

$$3x = \frac{y - 6p^2y^2}{p} = yp^{-1} - 6py^2 \text{, derivatifkan ke x}$$

$$3\frac{dx}{dy} = (p^{-1} - 12py) + (-yp^{-2} - 6y^2)\frac{dp}{dy} \qquad \text{, karena dx/dy = 1/p}$$

$$3\frac{1}{p} = (\frac{1}{p} - 12py) + (-yp^{-2} - 6y^2)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = (-\frac{2}{p} - 12py) + (-yp^{-2} - 6y^2)\frac{dp}{dy}$$

Kalikan dengan p^2

$$0 = (-2p - 12p^3y) + (-y - 6y^2p^2)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = -2p(1 + 6p^2y) - y(1 + 6p^2y)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = (1 + 6p^2y)(-2p - y\frac{dp}{dy})$$

Dari : $0 = -2p - y\frac{dp}{dy}$, dengan mudah akan diperoleh $p = \frac{C}{y^2}$

Substitusikan p ke PD, dan akan didapat primitif :

$\mathbf{Y^3 = 3Cx + 6C^2.}$

Bagaimana solusi singularnya ?

3.5. PD Clairout

Bentuk umum dari PD Clairout adalah :

$$\mathbf{y = px + f(p)} \qquad (3.9)$$

Ambil derivatif ke x :

$$\frac{dy}{dx} = p + (x + f'(p))\frac{dp}{dx} \qquad \text{substitusikan dy/dx = p}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}(x + f'(p))$$

Maka dari $\frac{dp}{dx} = 0$, diperoleh p = C, dan primitif didapat dengan substitusi p ke PD semula. Dari (x + f '(p)) = 0 serta PD semula akan diperoleh penyelesaian singular.

Contoh :

Diberikan PD : $y = px + p - p^2$, cari primitifnya.

PD dapat dikenali sebagai bentuk PD Clairout, sehingga dengan mensubstitusi p = C ke PD tersebut akan didapat primitif : $y = Cx + C - C^2$

Carilah penyelesaian singularnya !

3.6. PD d 'Alembert

Bentuk umum PD d ' Alembert adalah :

$$\mathbf{y = x.f(p) + g(p)} \qquad (3.10)$$

Ambil derivatif ke x :

$$\frac{dy}{dx} = f(p) + (x.f'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx}$$, substitusikan dy/dx = p

$$p - f(p) = (x.f'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx}$$

$$(p - f(p))\frac{dx}{dp} = x.f'(p) + g'(p)$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x.f'(p)}{p - f(p)} + \frac{g'(p)}{p - f(p)} \qquad (3.11)$$

Persamaan (3.11) merupakan PD ordo satu derajat satu, dan setelah diperoleh harga p, substitusikan ke PD semula untuk memperoleh primitif.

Soal - soal

Tentukan primitifnya dan cari penyelesaian singularnya bila ada

1. $xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0$
2. $x^2p^2 - y^2 = 0$
3. $xp^2 - (2x + 3y)p + 6y = 0$
4. $x^2p^2 - 5xyp + 6y^2 = 0$
5. $x^2p^2 + xp - y^2 - y = 0$
6. $p^2 - xy(x+y)p + x^3y^3 = 0$
7. $(4x - y)p^2 + 6(x - y)p + 2x - 5y = 0$
8. $(x - y)^2p^2 = y^2$
9. $xyp^2 + (xy^2 - 1)p - y = 0$
10. (x2+y2)p2 = 4x2y2
11. $(y + x)^2p^2 + (2y^2 + xy - x^2)p + y(y - x) = 0$
12. $xp^3 - (x^2 + x + y)p^2 + (x^2 + xy + y)p - xy = 0$
13. $p^2 - (x^2y + 3)p + 3x^2y = 0$
14. $xp^2 - (1 + xy)p + y = 0$
15. $p^2 - x^2y^2 = 0$
16. $(x + y)^2p^2 = y^2$
17. $yp^2 + (x - y^2)p - xy = 0$
18. $p^2 + x^3p - 2x^2y = 0$
19. $p^2 + 4x^5p - 12x^4y = 0$
20. $2xp^3 - 6yp^2 + x^4 = 0$
21. $p^2 - xp + y = 0$
22. $y = px + kp^2$
23. $x^8p^2 + 3xp + 9y = 0$
24. $x^4p^2 + 2x^3yp - 4 = 0$
25. $xp^2 - 2yp + 4x = 0$
26. $3x^4p^2 - xp - y = 0$
27. $xp^2 + (x - y)p + 1 - y = 0$
28. $p^3 + 2xp - y = 0$
29. $y = 2px + p^4x^2$
30. $p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$
31. $x = yp + p^2$
32. $7p^3 + 3p^2 - x = 0$
33. $p^3 + 5p^2 + 7p - y = 0$
34. $xp^2 - 2yp + x = 0$
35. $y - 2px - yp^2 = 0$
36. $xp - y + ½ a/p = 0$
37. $x^6p^3 - 3xp - 3y = 0$
38. $y = x^6p^3 - xp$
39. $2xp^2 + (2x - y)p + 1 - y = 0$
40. $5p^2 + 3xp - y = 0$
41. $p^2 + 3xp - y = 0$
42. $y = xp + x^3p^2$
43. $8y = 3x^2 + p^2$
44. $xp^3 - yp^2 + 1 = 0$
45. $y = px + p^n$; $n \neq 0$, $n \neq 1$
46. $(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 = 0$
47. $p^2 - xp - y = 0$
48. $2p^3 + xp - 2y = 0$
49. $4xp^2 - 3yp + 3 = 0$
50. $p^3 - xp + 2y = 0$

BAB IV

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDO SATU

Bentuk umum dari persamaan diferensial linear ordo satu kiranya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$b_1(x)\frac{dy}{dx}+b_0(x).y=R(x) \qquad (4.1)$$

dengan singkat dapat ditulis :

$$\mathbf{L}y = R(x)$$

Dalam hal ini, **L** yang disebut operator diferensial ordo satu adalah singkatan penulisan dari : $b_1(x)\frac{d}{dx}+b_0(x)$

Bentuk PD dalam persamaan (4.1) disebut PD Linear Tak Homogen , dan apabila, fungsi R(x) adalah sama dengan nol, maka PD tersebut dinamakan PD Linear Homogen (4.3). Bila kita perhatikan dua persamaan berikut :

$$b_1(x)\frac{dy}{dx}+b_0(x).y=R(x) \qquad (4.2)$$

$$b_1(x)\frac{dy}{dx}+b_0(x).y=0 \qquad (4.3)$$

PD Linear pada (4.2) adalah PD Linear tak homogen, dan PD pada (4.3) dikatakan sebagai bentuk homogen dari PD (4.2). PD Linear tak homogen berkaitan erat dengan bentuk homogennya.

Persamaan diferensial bentuk ini disebut linear karena memenuhi sifat – sifat kelinearan, yaitu bahwa :

$$\mathbf{L}\,[\,a.y_1(x) + b.y_2(x)\,] = a.\mathbf{L}y_1(x) + b.\mathbf{L}y_2(x) \qquad (4.4)$$

Untuk setiap bilangan real a dan b serta fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ yang terdiferensial.

4.1. PD Linear Homogen Ordo Satu

Bentuk umum dari PD Linear homogen ordo satu, seperti sudah dituliskan pada persamaan (4.3) yaitu :

$$b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x).y = 0 \qquad (4.5)$$

Atau dapat pula dituliskan :

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = 0 \qquad (4.6)$$

Cara – cara untuk menyelesaikan PD tipe ini :

1. <u>Dengan menggunakan cara PD Eksak</u>

   PD pada persamaan (4.6) bukan PD eksak, dapat dibuktikan sebagai berikut :

   $M(x,y) = P(x).y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = P(x)$

   $N(x,y) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

   Seperti yang sudah dipelajari pada bab terdahulu, maka PD ini akan mempunyai

   Faktor Integral yaitu :

   $\mu = e^{\int P(x)dx}$

   Bila kita kalikan dengan PD semula (4.6), akan diperoleh bentuk :

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}.P(x).y = 0 \qquad (4.7)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}.y\right) = 0 \qquad (4.8)$$

   Integralkan persamaan (4.8) akan diperoleh primitif PD :

$$y = C.e^{-\int P(x)dx} \qquad (4.9)$$

2. <u>Dengan melakukan pemisahan variabel</u>

   PD (4.6) dapat dipisah menjadi bentuk :

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \qquad (4.10)$$

   Integralkan persamaan (4.10) memberi hasil :

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C_1$$

$$y = C.e^{-\int P(x)dx} \qquad (4.11)$$

Contoh :

Diberikan PD : y' + xy = 0, tentukan primitifnya !

Dengan menggunakan persamaan (4.9), bahwa P(x) = x, maka primitifnya adalah

$$y = C.e^{-\int P(x)dx} = C.e^{-\int x dx} = C.e^{-1/2.x^2}$$

4.2. PD Linear Tak Homogen Ordo Satu

Bentuk umum PD ini seperti terlihat pada persamaan (4.2) :

$$b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x).y = R(x) \qquad (4.12)$$

Atau dapat pula ditulis :

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x) \qquad (4.13)$$

Cara – cara yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan PD ini :

1. <u>Dengan cara PD Eksak</u>

   Dari bentuk homogennya yang telah kita pelajari pada bagian (4.1), sudah ditunjukkan bahwa, PD bentuk homogennya mempunyai faktor integral $\mu(x)$:

   $$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

   Maka bila kita kalikan faktor integral ini ke bentuk tak homogennya, akan diperoleh :

   $$e^{\int P(x)dx}.y' + e^{\int P(x)dx}P(x).y = e^{\int P(x)dx}.Q(x) \qquad (4.14)$$

   atau

   $$d\left[e^{\int P(x)dx}.y\right] = e^{\int P(x)dx}.Q(x) \qquad (4.15)$$

   Bila diintegralkan :

   $$e^{\int P(x)dx}.y = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C \qquad (4.16)$$

   Atau dapat dituliskan bahwa primitif PD adalah :

   $$y = e^{-\int P(x)dx}.\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C.e^{-\int P(x)dx} \qquad (4.17)$$

   Coba lihat kembali persamaan (4.17), suku kedua merupakan solusi umum dari bentuk homogen (lihat persamaan (4.9) atau (4.11)). Dari sini dapat disimpulkan bahwa

primitif PD Linear tak homogen adalah solusi khusus bentuk tak homogen ditambah dengan solusi umum bentuk homogennya.

Contoh :

Cari primitif dari PD : $y' - y = e^{2x}$

Tampak bahwa $P(x) = -1$ dan $Q(x) = e^{2x}$

Menggunakan (4.17)

$$y = e^{\int dx}.\int e^{\int -dx}.e^{2x}dx + C.e^{\int dx}$$

$$y = e^{x}.\int e^{-x}.e^{2x}.dx + C.e^{x}$$

$$y = e^{2x} + C.e^{x}$$

2. <u>Dengan metode variasi parameter</u>

Misalkan penyelesaian PD Linear bentuk homogennya adalah $y = r(x)$, sehingga memberikan :

$$r'(x) + P(x).r(x) = 0 \qquad (4.18)$$

Andaikan pula solusi dari bentuk tak homogennya adalah

$$y = r(x).\phi(x) \qquad (4.19)$$

sehingga bila diderivatifkan ke – x :

$$y' = r'(x).\phi(x) + r(x).\phi'(x) \qquad (4.20)$$

Substitusikan (4.19) dan (4.20) ke PD semula (4.13) :

$$\{r'(x).\phi(x) + r(x).\phi'(x)\} + P(x).r(x).\phi(x) = Q(x)$$

Atau dapat disusun :

$$\phi(x)\{r'(x) + P(x).r(x)\} + r(x).\phi'(x) = Q(x) \qquad (4.21)$$

Mengingat persamaan (4.18) maka persamaan (4.21) dapat direduksi menjadi :

$$r(x).\phi'(x) = Q(x) \qquad (4.22)$$

Selanjutnya adalah mencari $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \int r(x)^{-1}.Q(x).dx + C$$

Karena $r(x)$ adalah solusi dari bentuk homogennya, berarti : $r(x) = e^{-\int P(x)dx}$, sehingga

$$\phi(x) = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x).dx + C$$

Dan solusi bentuk tak homogen y = r(x).ϕ(x), adalah :

$$y = e^{-\int P(x)dx}.\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C.e^{-\int P(x)dx} \qquad (4.23)$$

Kadang dijumpai dalam PD Linear tak homogen suatu bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = y^n.Q(x) \qquad (4.24)$$

PD ini disebut dengan nama **PD Bernoulli**. Maka untuk menyelesaikan PD tersebut kita lakukan substitusi :

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \qquad \text{ambil derivatif ke–x} : \frac{dz}{dx} = \frac{1-n}{y^n}.\frac{dy}{dx} \qquad (4.25)$$

Bila persamaan (4.24) kita bagi dengan y^n :

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}}.P(x) = Q(x) \qquad (4.26)$$

Sustitusikan (4.25) ke (4.26) :

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x).z = Q(x) \qquad (4.27)$$

PD dalam persamaan (4.27) dapat diselesaikan dengan cara – cara yang sudah dipelajari.

Contoh :

Diberikan PD : y’ + y = y^3, tentukanlah primitifnya !

Bila PD kita bagi dengan y^3, maka akan didapat :

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^2} = 1$$

Substitusikan : $z = \dfrac{1}{y^2}$ dan $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-2}{y^n}.\dfrac{dy}{dx}$

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + z = 1$$

Atau : $\frac{dz}{dx} - 2z = -2$, menggunakan (4.23) diperoleh :

$$z = e^{\int 2dx}.\int e^{\int -2dx}.(-2)dx + C.e^{\int 2dx}$$

$$z = -2.e^{2x}.\int e^{-2x} + C.e^{2x}$$

$$z = -1 + C.e^{2x}$$

Dan primitif diperoleh dari $z = \frac{1}{y^2}$, yaitu :

$$\frac{1}{y^2} = -1 + C.e^{2x}$$

Soal - soal

Tentukan primitif dari masing – masing PD Linear Ordo satu berikut ini :

1. $x(1 - x^2)y' + (2x^2 - 1)y = ax^3$
2. $xy' - y = x^3 + 1$
3. $(1 + x^2)y' + 2xy = \tan x$
4. $(x + 1)y' - y = 3x^4 + 4x^3$
5. $(1 + x^2)y' + xy = 3x^3$
6. $xy' = y + 2xy^2$
7. $y' - y = 2$
8. $y' \tan x = y$
9. $y' + ky = e^{-kx}$
10. $y' + 3y = e^{2x} + 6$
11. $y' + y = 10$
12. $xy' + y = 2x$
13. $y' + y = 2 \sin x$
14. $y' - 4y = x - 2x^2$
15. $(x^2 - 1)y' = xy$
16. $y' - 2y = 1 - 2x$
17. $y' + xy = 2x$
18. $y' = 2y/x + x^2.e^x$
19. $y' + 2y = \cos x$
20. $y' + 2xy = -6x$
21. $y' - y = e^x$; $y(1) = 0$
22. $y' + y = (x + 1)^2$; $y(0)=0$
23. $y' - x^3y = -4x^3$; $y(0) = 6$
24. $y' - 2y = 2\cosh 2x + 4$; $y(0)= -1.25$
25. $y' - y \cot x = 2x - x^2 \cot x$; $y(1/2\pi) = 1/4\pi^2 + 1$
26. $y' - (1 + 3x^{-1})y = x + 2$; $y(1) = e - 1$
27. $y' + y \tan x = 2x \cos x$; $y(0) = -1$
28. $y' = 2(y - 1) \tanh x$; $y(0) = 4$
29. $xy'=(1 + x)y$; $y(2) = 6e^2$
30. $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$
31. $y' - 2y = e^{2x} + 1$
32. $y.y' + a.y^2 = b \cos x$
33. $y' - y = xy^5$
34. $y' + 2xy + xy^4 = 0$
35. $y' - 2y = \begin{cases} \cos x \to 0 \le x \le \pi \\ 1 \to x \ge \pi \end{cases}$; $y(0) = -2$

BAB V

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDO LEBIH DARI SATU

Persamaan diferensial linear ordo lebih dari satu, berarti bahwa di dalam PD tersebut akan ditemui bentuk $\frac{d^m y}{dx^n}$, dengan nilai m adalah bilangan bulat lebih dari satu. Secara umum PD linear ordo n dapat dituliskan sebagai berikut :

$$b_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x).y = Q(x) \qquad (5.1)$$

Dengan syarat $b_0(x) \neq 0$, dan $b_0(x)$, $b_1(x)$…..$b_n(x)$ dan Q(x) bisa merupakan suatu fungsi x atau bisa juga merupakan konstan. Bila Q(x) = 0 maka akan diperoleh PD Linear bentuk homogennya :

$$b_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x).y = 0 \qquad (5.2)$$

Dengan menggunakan simbol operator diferensial (**L**), maka persamaan (5.1) dapat dituliskan secara singkat sebagai

$$\mathbf{L}y = Q(x) \qquad (5.3)$$

Dengan bentuk homogennya adalah :

$$\mathbf{L}y = 0 \qquad (5.4)$$

Dalam hal ini L merupakan bentuk singkat dari :

$$b_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + b_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + b_n(x) \qquad (5.5)$$

Dan seperti halnya PD Linear ordo satu, maka PD Linear ordo n ini mempunyai sifat – sifat kelinearan, yaitu bahwa :

$$\mathbf{L}\,[\, a.y_1(x) + b.y_2(x) \,] = a.\mathbf{L}y_1(x) + b.\mathbf{L}y_2(x) \qquad (5.6)$$

5.1. Himpunan Penyelesaian Yang Bebas Linear

Jika $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ …. $y = y_n(x)$, masing – masing merupakan penyelesaian dari (5.2), disebut **bebas linear** jika :

$C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n.y_n(x) = 0$

Hanya untuk $C_1 = C_2 = \ldots\ldots = C_n = 0$

Contoh :

Tunjukkan bahwa $y = e^{-x}$ dan $y = e^{2x}$, merupakan penyelesaian dari $y'' - y' - 2y = 0$! Buktikan pula bahwa keduanya bebas linear !

$y = e^{-x} \quad \rightarrow \quad y' = -e^{-x} \quad \rightarrow \quad y'' = e^{-x}$

Maka $y'' - y' - 2y = e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x} = 0$ (terbukti)

$y = e^{2x} \quad \rightarrow \quad y' = 2e^{2x} \quad \rightarrow \quad y'' = 4e^{2x}$

Maka $y'' - y' - 2y = 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$ (terbukti)

Agar bebas linear harus dibuktikan apakah $C_1.e^{-x} + C_2.e^{2x} = 0$, hanya untuk $C_1 = C_2 = 0$ saja ?

$$\begin{array}{lrl} & C_1.e^{-x} + C_2.e^{2x} = 0 & \\ \text{Derivatifnya ke} - x: & -C_1.e^{-x} + 2C_2.e^{2x} = 0 & + \\ \hline & 3C_2.e^{2x} = 0 & \rightarrow C_2 = 0 \text{ dan } C_1 = 0 \end{array}$$

Terbukti bahwa $C_1.e^{-x} + C_2.e^{2x} = 0$, hanya dipenuhi bila C_1 dan C_2 nol saja, jadi e^{-x} dan e^{2x} saling bebas linear.

Syarat umum :

Jika $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ….., $y = y_n(x)$ masing – masing penyelesaian dari (5.2), maka syarat yang cukup dan perlu agar $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ….., $y = y_n(x)$, merupakan Himpunan Penyelesaian yang bebas linear adalah dipenuhinya :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots. & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5.7)$$

Deteminan dalam (5.7) dinamakan Determinan Wronsky atau Wronskian.

Jika diketahui bahwa :

$y = y_1(x)$

$y = y_2(x)$

………..

$y = y_n(x)$

merupakan himpunan penyelesaian yang bebas linear dari (5.2), maka :

$$\mathbf{y = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) + \ldots\ldots\ldots + C_n.y_n(x)} \qquad (5.8)$$

merupakan **primitif** dari (5.2) dan disebut juga sebagai **penyelesaian lengkap** dari (5.2).

Jika :

1. $y = \phi(x)$ adalah penyelesaian khusus dari (5.1)
2. $y = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) + \ldots\ldots\ldots + C_n.y_n(x)$ adalah solusi umum bentuk homogennya

maka :

$y = \phi(x) + C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) + \ldots\ldots\ldots + C_n.y_n(x)$, merupakan primitif dari (5.1) dan disebut pula sebagai penyelesaian lengkap (5.1)

Untuk menunjukkan bahwa $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ….., $y = y_n(x)$ adalah penyelesaian dari (5.2) maka harus ditunjukkan sekaligus tiga hal berikut :

1. $y_1(x)$, $y_2(x)$ ….., $y_n(x)$ harus memenuhi persamaan (5.2)
2. Wronskian $\neq 0$
3. banyaknya konstan sembarang = ordo derivatif tertinggi

Contoh :

1. Tunjukkanlah bahwa :

   $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 6x\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$, mempunyai himpunan penyelesaian yang bebas linear berbentuk $y = x^r$

   $y = x^r$

   $\dfrac{dy}{dx} = r.x^{r-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1).x^{r-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = r(r-1)(r-2).x^{r-3}$$

Substitusikan ke PD semula diperoleh :

$x^3(r(r-1)(r-2))x^{r-3}) - 6x(r.x^{r-1}) + 12x^r = 0$

$x^3(r(r-1)(r-2))x^r.x^{-3} - 6x(r.x^r.x^{-1}) + 12x^r = 0$

$(r^3 - 3r^2 + 2r)x^r - 6r.x^r + 12x^r = 0$

$x^r (r^3 - 3r^2 - 4r + 12) = 0$

$r^3 - 3r^2 - 4r + 12 = 0$ atau $(r + 2)(r - 2)(r - 3) = 0$

Diperoleh Himpunan Penyelesaian :

$y = x^{-2}$; $y = x^2$; $y = x^3$

Periksa apakah ketiganya saling bebas linear, (syarat Wronskian $\neq 0$)

$$W = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^2 & x^3 \\ -2x^{-3} & 2x & 3x^2 \\ 6x^{-4} & 2 & 6x \end{vmatrix} = 20$$

Karena Wronskian $\neq 0$, maka ketiganya merupakan himpunan penyelesaian yang bebas linear.

2. Sudah ditunjukkan bahwa $y = e - x$ dan $y = e\ 2x$ adalah penyelesaian yang bebas linear dari $y'' - y' - 2y = 0$, sekarang tunjukkan bahwa $y = -\sin x$ adalah penyelesaian khusus dari $y'' - y' - 2y = \cos x + 3 \sin x$, cari pula primitif PD ini !

$y = -\sin x$

$y' = -\cos x$

$y'' = \sin x$

Sehingga $y'' - y' - 2y = \sin x + \cos x + 2 \sin x = \cos x + 3 \sin x$,

Terbukti bahwa $y = -\sin x$ adalah penyelesaian khusus dari $y'' - y' - 2y = \cos x + 3 \sin x$.

Dan primitif dari $y'' - y' - 2y = \cos x + 3 \sin x$, adalah merupakan jumlah penyelesaian umum bentuk homogennya ditambah penyelesaian khusus ini.

Primitif PD : $\mathbf{y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \sin x}$

5.2. PD Linear Homogen Dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum dari PD Linear homogen ordo n dengan koefisien konstan adalah :

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n .y = 0 \qquad (5.9)$$

Bentuk ini hampir sama dengan (5.2), hanya saja P_0, P_1, P_2, …. Pn bukanlah merupakan suatu fungsi, melainkan suatu konstan sembarang. P_0 tidak sama dengan nol, biasanya, P_0 sama dengan satu.

Untuk selanjutnya bentuk $\frac{d^n}{dx^n}$ akan disingkat menjadi $\mathbf{D^n}$, sehingga persamaan (5.9) dapat ditulis ringkas sebagai berikut :

$$\mathbf{(P_0.D^n + P_1.D^{n-1} + P_2.D^{n-2} + \ldots\ldots. + P_{n-1}.D + P_n) \; y = 0} \qquad (5.10)$$

Persamaan (5.10) disebut pula sebagai persamaan karakteristik. Dan dapat dituliskan pula sebagai $\mathbf{L}(D)y = 0$ (5.11)

Di mana $\mathbf{L}(D)$ merupakan suatu polinomial berderajat n, yang dapat diuraikan menjadi faktor – faktor linear :

$$\mathbf{L}(D) = (D - m_1)(D - m_2)\ldots\ldots.(D - m_n) \qquad (5.12)$$

Da m_1, m_2, … m_n disebut sebagai **akar – akar karakteristik**.

Dengan memperhatikan (5.12) maka (5.10) dapat dituliskan pula sebagai :

$$(D - m_1)(D - m_2)\ldots\ldots.(D - m_n)y = 0 \qquad (5.13)$$

Contoh :

$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$, dapat dituliskan :

$(D^3 - D^2 - 4D + 4) \; y = 0$

$(D - 1)(D^2 - 4) \; y = 0$

$(D - 1)(D - 2)(D + 2)y = 0$

Dalam mencari akar – akar karakteristiknya pada umumnya akan dijumpai 4 macam kasus sebagai berikut :

1. <u>Semua akarnya adalah riil dan semua berbeda</u>

   $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots\ldots \neq m_n$

Maka akar – akar ini memberikan sumbangan primitif PD **L**(D)y = 0 berupa :

$$y = C_1.e^{m_1x} + C_2.e^{m_2x} + ...+ C_n.e^{m_nx} \qquad (5.14)$$

2. Semua akar riil, namun ada akar yang sama

$m_1 = m_2 = …. = m_r = m$

$m_{r+1} \neq m_{r+2} \neq …… \neq m_n$

m_1, m_2, …. m_r akan memberikan sumbangan primitif berupa :

$$y = C_1.e^{mx} + C_2.x.e^{mx} + ...+ C_r.x^{r-1}.e^{mx}$$

Dan m_{r+1},m_{r+2}, ……, m_n memberikan sumbangan primitif berupa :

$$y = C_{r+1}.e^{m_{r+1}.x} + C_{r+2}.e^{m_{r+2}.x} + ...+ C_n.e^{m_nx}$$

Sehingga primitif PD **L**(D)y = 0 adalah jumlah keduanya yaitu :

$$y = C_1.e^{mx} + C_2.x.e^{mx} + ...+ C_r.x^{r-1}.e^{mx}$$

$$+ C_{r+1}.e^{m_{r+1}.x} + C_{r+2}.e^{m_{r+2}.x} + ...+ C_n.e^{m_nx} \qquad (5.15)$$

3. Ada akar yang berupa bilangan kompleks

$m_1 = a + bi$ dan $m_2 = a – bi$

$m_3 \neq m_4 \neq …. \neq m_n$

Maka m1 dan m2 akan memberi sumbangan primitif berupa :

$y = K_1.e^{(a+bi)x} + K_2.e^{(a-bi)x}$

Dengan menggunakan rumus dari Euler :

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)x} &= e^{ax}.e^{ibx} \\ &= e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \\ e^{(a-bi)x} &= e^{ax}.e^{-ibx} \\ &= e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} K_1.e^{(a+bi)x} + K_2.e^{(a-bi)x} &= K_1.\ e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + K_2.\ e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \\ &= e^{ax}(\ (K_1+K_2)\cos bx + i(K_1 - K_2)\sin bx\ ) \\ &= e^{ax}(\ C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\ ) \end{aligned}$$

Sedangkan m_3, m_4 …. M_n memberi sumbangan primitif :

$$y = C_3.e^{m_3x} + C_4.e^{m_4x} + ...+ C_n.e^{m_nx}$$

Dan primitif dari **L**(D)y = 0 adalah :

$Y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + C_3.e^{m_3x} + C_4.e^{m_4x} + ...+ C_n.e^{m_nx}$

(5.16)

4. <u>Ada akar kembar yang merupakan bilangan kompleks</u>

$m_1 = m_2 = a + bi$ dan $m_3 = m_4 = a – bi$

$m_5 \neq m_6 \neq ….. \neq m_n$

Maka primitif dari **L**(D)y = 0 adalah :

$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + x.e^{ax} (C_3 \cos bx + C_4 \sin bx)$

$+ C_5.e^{m_5x} + C_6.e^{m_6x} + ...+ C_n.e^{m_nx}$ (5.17)

Contoh : Tentukan primitif masing – masing PD berikut :

1. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

Maka persamaan karakteristiknya :

$L(D)y = (D^3 – D^2 – 4y + 4) y = 0$

Bila kita faktorkan :

$L(D)y = (D – 1)(D – 2)(D + 2) = 0$

Maka primitif PD adalah :

$y = C_1.e^x + C_2.e^{2x} + C_3.e^{-2x}$

2. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0$

Persamaan karakteristiknya :

$\mathbf{L}(D)y = (D^3 – 2D^2 – 4D + 8)y = 0$

$= (D + 2)(D – 2)(D – 2) = 0$

Dan primitifnya adalah :

$y = C_1.e^{-2x} + C_2.e^{2x} + C_3.x.e^{2x}$

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Persamaan karakteristiknya :

$\mathbf{L}(D)y = (D^2 – 4D + 5)y = 0$

$= (D – (2 + i))(D – (2 – i))$

Primitifnya adalah :

$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

4. $$\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y\right)^2 = 0$$

Persamaan karakteristiknya :

$\mathbf{L}(D)y = (D^2 – 2D + 5)^2y = 0$

$= ((D – (1 + 2i))(D – (1 – 2i)))^2$

Primitifnya adalah :

$y = e^x(C_1. \cos 2x + C_2. \sin 2x) + x.e^x(C_3. \cos 2x + C_4. \sin 2x)$

Soal - soal

Tunjukkanlah bahwa Himpunan Penyelesaian berikut ini merupakan solusi dari masing – masing PD terkait, tunjukkan pula apakah Himpunan Penyelesaian ini bebas linear !

1. $(t, 1/t)$; $t^2w''(t) + tw'(t) - w(t) = 0$
2. $(e^t, t.e^t, t^2e^t)$; $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)w(t) = 0$
3. $(\cosh \mu x, \sinh \mu x)$; $y''(x) - \mu^2 y(x) = 0$
4. $\{ \cos(2 \ln x) , \sin (2 \ln x) \}$; $x^2v''(x) + x.v'(x) - 4v(x) = 0$
5. $(e^z, e^z \ln z)$; $zy''(z) + (1 - 2z)y'(z) + (z -1)y(z) = 0$
6. $(z^2, z \cos z, z \sin z)$; $\{ z^3D^3 - 4z^2D^2 + z(8+z^2)D - 2(4+z^2)\}w(z) = 0$
7. $\left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \frac{A \sin x}{x\sqrt{1-x^2}} \right\}$; $(x(1 - x^2)D^3 + (3 - 8x^2)D^2 - 14xD - 4) y(x) = 0$
8. $(\cos t, \sin t, \cosh t, \sinh t)$; $(D^4 - 1)w(t) = 0$
9. $(1, t, e^t, t.e^t)$; $(D^4 - 2D^3 + D^2)v(t) = 0$

Tentukan primitif dari masing – masing PD berikut ini

10. $(D^2 - D - 2)y = 0$
11. $(6D^2 - D - 1)y = 0$
12. $(D^2 + 2D - 0.44)y = 0$
13. $(D^2 - 1.8D + 5.22)y = 0$
14. $(\pi^2D^2 - 4\pi D + 4)y = 0$
15. $(4D^2 + 12D + 13)y = 0$
16. $(4D^2 - 12D + 9)y = 0$
17. $(D^2 + 7D + 14.5)y = 0$
18. $(10D^2 + 12D + 3.6)y = 0$
19. $(D^2 + 2kD + k2 + 3)y = 0$
20. $(D^3 + 3D^2 - 4D)y = 0$
21. $(D^3 - 3D^2 - 10D)y = 0$
22. $(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y = 0$
23. $(D^3 + 3D^2 - 4D - 12)y = 0$
24. $(4D^3 - 7D + 3)y = 0$
25. $(4D^4 - 8D^3 - 7D^2 + 11D + 6)y = 0$

26. $(4D^4 - 16D^3 + 7D^2 + 4D - 2)y = 0$

27. $4D^4 + 4D^3 - 13D^2 - 7D + 6)y = 0$

28. $(4D^5 - 8D^4 - 17D^3 + 12D^2 + 9D)y = 0$

29. $(D^2 - 4aD + 3a^2)y = 0$; a riil $\neq 0$

30. $(D^2 - (a+b)D + ab)y = 0$; a dan b riil $\neq 0$

Tentukan penyelesaian khusus dari masing – masing PD :

31. $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$

32. $w'' + 4w' + 4w = 0$; $w(0)=e^{-1}$, $w(1)=0$

33. $w'' - 6w' + 8w = 0$; $w(1)=3$, $w'(1)=8$

34. $u'' + 2u' + 2u = 0$; $u(0)=1$, $u'(0)=0$

35. $u'' - 6u' + 9u = 0$; $u(0)=0$, $u'(0)=18$

36. $(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)= -1$, $y''(0)=5$

37. $y'' - 16y = 0$; $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$

38. $(D^2 + 2D + 2)y = 0$; $y(0)=1$, $y'(0)= -1$

39. $(D^2 + 4D + 4 + \pi^2)y = 0$; $y(1)= -1/e^2$, $y'(1)= (2+2\pi)/e^2$

40. $(9D^2 + 6D + 1)y = 0$; $y(-3)=10e \approx 27.18$ $y'(-3)= -19/3\ e \approx -17.22$

41. $(D^2 - 0.2D + 100.01)y = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=40$

42. $(8D^2 + 2D - 1)y = 0$; $y(0) = 5/2$, $y'(0)= -13/8$

43. $(D^2 - 0.1D - 3.8(y = 0$; $y(0)= -3.9$, $y'(0)=7.8$

44. $(D^2 + D + 0.25)y = 0$; $y(2) = 50e \approx 18.39$, $y'(2)=0$

45. $y'' - 16y = 0$; $y(\pi)=4$, $y'(\pi)=0$

5.3. PD Linear Tak Homogen Dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum dari PD Linear tak homogen ordo n dengan koefisien konstan ini adalah :

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n . y = Q(x) \qquad (5.18)$$

Dan bentuk tak homogen ini senantiasa terkait erat dengan bentuk homogennya :

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n . y = 0 \qquad (5.19)$$

Secara ringkas PD ini dapat pula dituliskan :

$$\mathbf{(P_0.D^n + P_1.D^{n-1} + P_2.D^{n-2} + \ldots\ldots + P_{n-1}.D + P_n) y = Q(x)} \qquad (5.20)$$

Dengan P_0, P_1, P_2, …. P_n adalah konstanta dan P_0 tidak sama dengan nol. Dan seperti halnya bentuk homogennya, persamaan karakteristik (5.20) dapat pula diuraikan menjadi bentuk :

$$(D - m_1)(D - m_2)\ldots\ldots(D - m_n)y = Q(x) \qquad (5.21)$$

atau : $\mathbf{L}(D)y = Q(x)$ (5.22)

Untuk menentukan primitif dari (5.22) ditempuh melalui langkah berikut :

1. Cari penyelesaian umum bentuk homogennya
2. Cari penyelesaian khusus bentuk tak homogennya
3. Primitif PD Linear tak homogen = penyelesaian khusus bentuk tak homogen + penyelesaian umum bentuk homogennya

Contoh :

Diberikan PD $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

Penyelesaian umum bentuk homogennya adalah

$y_c = C_1.e^{2x} + C_2.e^x$

Penyelesaian khusus bentuk tak homogen adalah

$y_p = -\, x.e^x$

Primitif PD : $y = -\, x.e^x + -\, x.e^x$

Yang menjadi masalah sekarang adalah bagaimana mencari penyelesaian khusus bentuk tak homogen tersebut? Ada beberapa cara yang dapat dilaksanakan untuk mencari penyelesaian khusus tersebut :

1. Membuat persamaan karakteristik menjadi pecahan – pecahan parsial, dengan jalan :

   Bagi : **L**(D)y = Q(x) dengan **L**(D)

   $$\frac{1}{L(D)}L(D)y = \frac{1}{L(D)}Q(x)$$

   $$y = \frac{1}{L(D)}Q(x)$$

   Uraikan **L**(D) atas akar – akarnya :

   $$y = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)....(D-m_n)}Q(x)$$

   Pecahan di atas dapat diubah menjadi pecahan parsial berikut :

   $$y = \frac{A_1}{(D-m_1)}Q(x) + \frac{A_2}{(D-m_2)}Q(x) + ...+ \frac{A_n}{(D-m_n)}Q(x) \qquad (5.23)$$

   Misalkan :

   $$u_1(x) = \frac{A_1}{(D-m_1)}Q(x)$$

   Bentuk ini merupakan PD linear ordo satu, dan dapat dituliskan dalam bentuk :

   $$\frac{du_1(x)}{dx} - m_1.u_1(x) = A_1.Q(x)$$

   yang memberikan penyelesaian :

   $$u_1(x) = A_1.e^{\int m_1 dx}\int Q(x).e^{-\int m_1 dx}dx$$

Hal yang sama dilakukan terhadap suku – suku yang lain, sehingga akhirnya diperoleh :

$$y_p = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) \qquad (5.24)$$

Contoh :

Diberikan PD : $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$, tentukan primitifnya !

Persamaan karakteristik PD tersebut :

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

Dan bila diuraikan atas akar – akarnya :

$$(D - 1)(D - 2)y = 0$$

Penyelesaian umum bentuk homogen ini diberikan oleh :

$$y_c = C_1.e^x + C_2.e^{2x}$$

Sekarang tinggal mencari penyelesaian khusus bentuk tak homogennya . PD kita bagi dengan (D – 1)(D – 2) sehingga berbentuk :

$$\frac{1}{(D-1)(D-2)}(D-1)(D-2)y = \frac{1}{(D-1)(D-2)}e^x$$

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-2)}e^x$$

Pecahan $\frac{1}{(D-1)(D-2)}$ dapat diubah menjadi pecahan – pecahan parsial :

$$\frac{1}{(D-1)(D-2)} = \frac{A}{(D-1)} + \frac{B}{(D-2)}$$

$$= \frac{A(D-2) + B(D-1)}{(D-1)(D-2)}$$

$$= \frac{(A+B)D + (-2A-B)}{(D-1)(D-2)}$$

Maka dari persamaan di atas kita peroleh dua buah persamaan, untuk mendapatkan berapa harga A dan B :

$$A + B = 0$$

$$-2A - B = 1$$

Dari kedua persamaan ini diperoleh $A = -1$ dan $B = 1$, sehingga dapat dituliskan :

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-2)} = \frac{-1}{(D-1)}e^x + \frac{1}{(D-2)}e^x$$

Bila diselesaikan :

$$u_1 = \frac{-1}{(D-1)}e^x \quad \rightarrow \quad \frac{du_1}{dx} - u_1 = -e^x \quad \text{memberikan } u_1 = -x.e^x$$

dan $$u_2 = \frac{1}{(D-2)}e^x \quad \rightarrow \quad \frac{du_2}{dx} - 2u_2 = e^x \quad \text{memberikan } u_2 = -e^x$$

Sehingga penyelesaian khusus bentuk tak homogennya adalah :

$$y_p = -x.e^x - e^x$$

Primitif PD adalah : $y = C_1.e^x + C_2.e^{2x} + -x.e^x - e^x$ atau :

$y = (C_1 - 1)e^x + C_2.e^{2x} - x.e^x$ atau :

$y = C_3e^x + C_2.e^{2x} - x.e^x$

2. <u>Dengan metoda variasi parameter</u>

Diberikan PD :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n.y = Q(x)$$

Misalkan ditemukan bahwa $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, …. $y = y_n(x)$, merupakan penyelesaian bentuk homogennya. Karena sifat kelinearan, maka :

$$y = y_1(x) + y_2(x) + \ldots.. + y_n(x)$$

juga merupakan penyelesaian PD tersebut.

Misalkan :

$$y = \phi_1(x)y_1(x) + \phi_2(x)y_2(x) + \ldots.. + \phi_n(x)y_n(x)$$

merupakan penyelesaian bentuk tak homogennya.

Derivatif pertamanya :

$$y' = \phi_1(x)y_1'(x) + \phi_2(x)y_2'(x) + \ldots.. + \phi_n(x)y_n'(x)$$
$$+ \phi_1'(x)y_1(x) + \phi_2'(x)y_2(x) + \ldots.. + \phi_n'(x)y_n(x)$$

Bila diambil

$$\phi_1'(x)y_1(x) + \phi_2'(x)y_2(x) + \ldots.. + \phi_n'(x)y_n(x) = 0 \qquad (5.25)$$

Maka :

$$y' = \phi_1(x)y_1'(x) + \phi_2(x)y_2'(x) + \ldots.. + \phi_n(x)y_n'(x)$$

Derivatif keduanya adalah :

$$y'' = \phi_1(x)y_1''(x) + \phi_2(x)y_2''(x) + \ldots.. + \phi_n(x)y_n''(x)$$
$$+ \phi_1'(x)y_1'(x) + \phi_2'(x)y_2'(x) + \ldots.. + \phi_n'(x)y_n'(x)$$

Ambil : $\phi_1'(x)y_1'(x) + \phi_2'(x)y_2'(x) + \ldots.. + \phi_n'(x)y_n'(x) = 0$ (5.26)

Demikian dilakukan hingga derivatif ke n, dan memberikan :

$$\phi_1'(x)y_1^n(x) + \phi_2'(x)y_2^n(x) + \ldots.. + \phi_n'(x)y_n^n(x) = Q(x) \qquad (5.27)$$

Dan akhirnya dari langkah – langkah di atas akan dijumpai suatu persamaan linear dengan n variabel yaitu $\phi_1'(x),\phi_2'(x),\ldots..\phi_n'(x)$, yang bila disusun dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^n & y_2^n & \ldots. & y_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \ldots \\ \phi_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ Q(x) \end{bmatrix} \qquad (5.28)$$

Dengan menggunakan teorema Cramer, maka $\phi_1'(x),\phi_2'(x),\ldots..\phi_n'(x)$, dapat dicari, selanjutnya dengan mengintegralkan $\phi_1'(x),\phi_2'(x),\ldots..\phi_n'(x)$, akan diperoleh $\phi_1(x),\phi_2(x),\ldots..\phi_n(x)$. Sehingga penyelesaian khusus bentuk tak homogen adalah :

$$yp = \phi_1(x)y_1(x) + \phi_2(x)y_2(x) + \ldots.. + \phi_n(x)y_n(x) \qquad (5.29)$$

Dengan mengingat bahwa $y = y_1(x) + y_2(x) + \ldots.. + y_n(x)$ merupakan penyelesaian bentuk homogen PD terkait.

Contoh :

Diberikan PD : $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$, tentukan primitifnya !

Sudah dicari sebelumnya bahwa $y_c = C_1.e^x + C_2.e^{2x}$ merupakan penyelesaian umum bentuk homogen. Sekarang kita misalkan bahwa $y = \phi_1(x).e^x + \phi_2(x).e^{2x}$ merupakan penyelesaian PD bentuk tak homogen.

Maka berdasarkan 5.28 dapat disusun suatu persamaan linear :

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}$$

Dari teorema Cramer dapat diperoleh ϕ_1’ dan ϕ_2’

$$\phi_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{3x}}{e^{3x}} = -1$$

$$\phi_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}}{e^{3x}} = -e^{-x}$$

Bila diintegralkan diperoleh

$\phi_1(x) = -x + C_1$ dan $\phi_2(x) = e^{-x} + C_2$

Dan primitif PD diberikan oleh :

$y = \phi_1(x).e^x + \phi_2(x).e^{2x}$

$y = (-x + C_1)e^x + (e^{-x} + C_2)\, e^{2x}$

$y = -\, x.e^x + (C_1 + 1)e^x + C_2.e^{2x}$

$y = y = C_3e^x + C_2.e^{2x} - x.e^x$

Ternyata memberi hasil yang sama dengan metoda sebelumnya

Contoh lain :

Diberikan PD : $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = \csc x$, tentukan primitifnya !

Susun dahulu persamaan karakteristiknya :

$(D^3 + D)y = 0$

Bila diuraikan :

$D(D^2 + 1)y = 0$

Akar – akar karakteristiknya adalah D = 0 dan D = $\pm$ i, maka penyelesaian umum bentuk homogennya adalah :

$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

Misalkan primitif PD adalah : $y = \phi_1(x) + \phi_2(x).\cos x + \phi_3(x).\sin x$, maka dapat disusun suatu persamaan linear :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \csc x \end{bmatrix}$$

Dan dengan menggunakan Cramer dapat dihitung $\phi_1', \phi_2', \phi_3'$.

$$\phi_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \csc x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \csc x$$

$$\phi_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \csc x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -\cot x$$

$$\phi_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \csc x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -1$$

Bila diintegralkan :

$$\phi_1(x) = \int \csc x dx = -\ln[\csc x - \cot x] + C_1$$

$$\phi_2(x) = \int -\cot x dx = -\ln \sin x + C_2$$

$$\phi_3(x) = \int -dx = -x + C_3$$

Dan primitif PD adalah :

$y = \phi_1(x) + \phi_2(x).\cos x + \phi_3(x).\sin x$

$y = -\ln [\, \csc x - \sin x \,] + C_1 - (\ln \sin x)\cos x + C_2.\cos x - x.\sin x + C_3.\sin x$

$y = C_1 + C_2.\cos x + C_3.\sin x - \ln [\, \csc x - \sin x \,] - (\ln \sin x)\cos x - x.\sin x$

Dapat dicoba menggunakan metoda 1, dicek apakah memberikan hasil yang sama.

3. <u>Dengan metoda koefisien tak tentu</u>

Diberikan PD :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots\dots\dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n.y = Q(x)$$

Akan ditentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen, dengan menggunakan koefisien tak tentu. (Metoda ini hanya dapat digunakan untuk beberapa bentuk khusus saja)

Kasus I : $Q(x) = A.e^{px}$, di mana $A.e^{px}$ bukan penyelesaian bentuk homogen

Misalkan $y_p = e^{px}$ penyelesaian bentuk tak homogennya, maka bila diderivatifkan sebanyak n kali dan disubstitusikan ke PD semula, akan didapat bentuk :

$$(\, p^n + P_1.p^{n-1} + \dots.. + P_{n-1}.p + P_n \,).\, C.e^{px} = A.e^{px}$$

Sehingga : $$C = \frac{A}{(p^n + P_1.p^{n-1} + \dots + P_{n-1}.p + P_n)} \qquad (5.30)$$

Contoh :

$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = 3.e^{-5x}$, tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen !

Misalkan penyelesaian khusus itu adalah $y_p = C.e^{-5x}$

Maka diperoleh : $y_p' = -5.C.e^{-5x}$ dan $y_p'' = 25.C.e^{-5x}$

Substitusikan ke PD :

$$(\, 25 - 15 - 2 \,).C.e^{-5x} = 3.e^{-5x}$$

Diperoleh : $C = \frac{3}{8}$

Sehingga penyelesaian khusus bentuk tak homogen adalah :

$$y_p = \frac{3}{8}.e^{-5x}$$

Bagaimana primitif PD tersebut ?

Jika : $Q(x) = e^{px}$, dan p merupakan akar karakteristik dari PD terkait, yang berulang sebanyak k kali, maka permisalan yang diambil haruslah berbentuk $y = C.x^k.e^{px}$. (disebut penyelesaian multiplisitas k).

Contoh :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 5.e^x$, cari penyelesaian khusus bentuk tak homogen!

Persamaan karakteristiknya :

$(D^2 + D - 2)y = 0$

$(D + 2)(D - 1)y = 0$

karena bentuk e^x merupakan salah satu solusi bentuk homogennya, maka kita ambil permisalah penyelesaian khusus bentuk tak homogen adalah $y_p = C.x.e^x$

Dan diperoleh $y_p' = C.e^x(1 + x)$ dan $y_p'' = C.e^x(2 + x)$

Substitusikan ke PD :

$$(2 + x + 1 + x - 2x)C.e^x = 5.e^x$$

$$3.C.e^x = 5.e^x$$

Dan C = 5/3

Sehingga penyelesaian khusus $y_p = 5/3.\ e^x$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 5.e^{2x}$, cari penyelesaian khusus bentuk tak homogen !

Persamaan karakteristiknya :

$(D^2 - 4D + 4)y = 0$

$(D - 2)(D - 2)y = 0$

Karena e^{2x} merupakan solusi bentuk homogen yang berulang 2 kali, maka kita ambil permisalan untuk penyelesaian khususnya berbentuk $y_p = C.x^2.e^{2x}$

Sehingga diperoleh :

$y_p' = C.e^{2x}(2x^2 + 2x)$

$y_p'' = C.e^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$

Substitusikan ke PD semula, akan diperoleh bentuk :

$(4x^2 + 8x + 2 – 8x^2 – 8x + 4x^2)C.e^{2x} = 5.e^{2x}$

Dan akan didapatkan bahwa C = 5/2

Sehingga penyelesaian khusus tersebut adalah $y_p = 5/2.e^{2x}$

Kasus II : Q(x) = A cos bx atau Q(x) = A sin bx atau Q(x) = A cos bx + B sin bx

Maka untuk menentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogennya harus kita ambil bentuk : $y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$. (5.31)

Jika $C_1 \cos bx$ dan $C_2 \sin bx$, terkait dengan penyelesaian umum bentuk homogennya yang berulang sebanyak k kali, maka permisalan yang kita ambil haruslah berbentuk

$y = C_1.x^k.\cos bx + C_2.x^k \sin bx$ (5.32)

Contoh : Tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogennya dari PD berikut !

1. $(D^2 + 4)y = 10 \cos x$

Penyelesaian bentuk homogennya adalah :

$y_c = C_1 \cos 2 x + C_2 \sin 2x$

Dan penyelesaian khusus tak homogen dapat diambil dalam bentuk

$y_p = A \cos x + B \sin x$

Sehingga dapat ditentukan pula bahwa :

$y_p' = – A \sin x + B \cos x$

$y_p'' = – A \cos x – B \sin x$

Substitusikan ke PD semula dan kumpulkan atas suku – sukunya maka diperoleh :

$3 A \cos x + 3 B \sin x = 10 \cos x$

Dan persamaan ini akan memberikan harga : $A = \frac{10}{3}$ dan B = 0

Sehingga $y_p = \frac{10}{3} \cos x$

2. $(D^2 + 1)y = \sin x$

Penyelesaian umum bentuk homogennya adalah :

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Maka penyelesaian khusus bentuk tak homogennya kita misalkan :

y_p = A.x cos x + B.x sin x

y_p' = A (cos x – x sin x) + B(sin x + x cos x)

y_p'' = A(– 2 sin x – x cos x) + B(2 cos x – x sin x)

Bila kita substitusikan ke PD semula dan kita kelompokkan atas suku – sukunya, maka akan diperoleh :

– 2 A sin x + 2 B cos x = sin x

Persamaan ini memberikan harga A = – ½ dan B = 0, sehingga y_p = –1/2 cos x

3. (D^2 + 4)y = 10 cos 2x – sin 2 x

Penyelesaian umum bentuk homogennya adalah :

$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Maka kita ambil permisalan untuk penyelesaian khusus bentuk tak homogen adalah

y_p = A.x cos 2x + B.x sin 2 x

y_p' = A (cos 2x – 2.x.sin 2x) + B (sin 2x + 2.x.cos 2x)

y_p'' = A (– 4 sin 2 x – 4.x.cos 2x) + B (4 cos 2x – 4.x. sin 2x)

Bila kita susbstitusikan ke PD semula dan pisahkan suku sinus dan cosinus, maka akan didapatkan :

Sin 2x.(–4A) + cos 2x.(4B) = 10 cos 2x – sin 2x

Dan akan didapatkan bahwa A = $\frac{1}{4}$ dan B = $\frac{5}{2}$, sehingga penyelesaian khusus bentuk tak homogen adalah :

$y_p = \frac{1}{4}.x.\cos 2x + \frac{5}{2}.x.\sin 2x$

Kasus III : apabila $Q(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + K$, maka untuk menentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogennya, dapat kita ambil permisalan :

$$y_p = A_1.x^n + A_2.x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}.x + A_n.K \qquad (5.33)$$

bentuk ini sebenarnya dapat pula dituliskan sebagai : $x^n.e^0 + x^{n-1}\ e^0 + \ldots. + x\ e^0 + Ke^0$, dan apabila PD mempunyai akar karakteristik 0 yang berulang sebanyak k kali, maka permisalan yang kita ambil haruslah berbentuk :

$$y_p = x^k(A_1.x^n + A_2.x^{n-1} + \ldots. + A_{n-1}.x + A_n.K) \qquad (5.34)$$

Contoh :

Diberikan PD : $(D^2 - D)y = x^2$, tentukan primitif PD tersebut !

Persamaan karakteristiknya adalah :

$$D(D - 1)y = 0$$

Sehingga penyelesaian umum bentuk homogennya :

$$y_c = C_1 + C_2.e^x$$

Untuk mencari penyelesaian khusus bentuk tak homogen, maka kita misalkan :

$y_p = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D$, dan akan didapatkan pula

$$y_p' = 3A.x^2 + 2B.x + C$$

$$y_p'' = 6A.x + 2B$$

Bila kita susbstitusikan ke PD, akan diperoleh bentuk :

$$- 3\ A.x^2 + (6A - 2B).x + (2B - C) = x^2$$

Dari persamaan di atas, ada 3 persamaan yang diperoleh yaitu :

$$- 3\ A = 1 \qquad (6A - 2\ B) = 0 \qquad (2B - C) = 0$$

Dan bila diselesaikan maka didapatkan harga – harga :

$$A = -\frac{1}{3} \qquad B = -1 \qquad C = -2$$

Dan penyelesaian khusus bentuk tak homogen :

$$y_p = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$$

Primitif PD adalah $y = C_1 + C_2.e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$

Kasus IV : Q(x) = sinh ax , atau Q(x) = cosh ax, bentuk sinh ax dan cosh ax ini dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\sinh ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \qquad \cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \qquad (5.35)$$

Dan bila sudah diuraikan demikian maka langkah untuk mencari permisalan penyelesaian khusus bentuk tak homogennya menjadi seperti pada kasus I di atas.

5.4. Teorema Oliver Heaviside

Pada bab terdahulu sudah kita pelajari bersama, berbagai metode yang dapat ditempuh untuk mencari bentuk penyelesaian khusus dari bentuk tak homogen suatu PD Linear ordo n. Pada bab ini akan diperkenalkan suatu metode yang jauh lebih singkat untuk mencari penyelesaian khusus tersebut (y_p). Teorema ini dikembangkan oleh Oliver Heaviside (1890).

Diberikan PD : L(D)y = Q(x)

Maka untuk menentukan penyelesaian bentuk tak homogen, seperti pada metoda sebelumnya, PD kita bagi dengan L(D), sehingga :

$$y_p = \frac{1}{L(D)} Q(x)$$

Kasus I : **Q(x) = e^{ax}**

a. Jika L(a) ≠ 0 maka $\frac{1}{L(D)} e^{ax} = \frac{1}{L(a)} e^{ax}$ (5.36)

b. Jika L(a) = 0 namun L’(a) ≠ 0 maka $\frac{1}{L(D)} e^{ax} = x.\frac{1}{L'(a)} e^{ax}$ (5.37)

c. Jika L(a) = 0 dan L’(a) = 0, namun L’’(a) ≠ 0, maka $\frac{1}{L(D)} e^{ax} = x^2.\frac{1}{L''(a)} e^{ax}$

(5.38)

Contoh :

Tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen dari PD berikut

1. ($D^3 - 2D^2 - 5D + 6$)y = e^{4x}

   $$y_p = \frac{1}{(4^3 - 2.4^2 - 5.4 + 6)} e^{4x} = \frac{1}{18} e^{4x}$$

2. ($D^3 - 2D^2 - 5D + 6$)y = e^{3x}

   Karena L(3) = 0, maka cari turunan dari L(D), yaitu : L’(D) = $3D^2 - 4D - 5$

Sehingga L’(3) = 10

$y_p = \frac{1}{10}.x.e^{3x}$

3. ($D^3 - 5D^2 + 8D - 4$)y = e^{2x}

   Baik L(2) maupun L’(2) adalah sama dengan nol, sehingga kita cari L’’(D), yakni L’’(D) = 6D – 10 , dan L’’(2) = 2. Maka :

   $y_p = \frac{1}{2}.x^2.e^{2x}$

Kasus II : **Q(x) = sin (ax + b)**

a. Jika $F(-a^2) \neq 0$ maka $\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)$ (5.39)

b. Jika $F(-a^2) = 0$ namun $F'(-a^2) \neq 0$, maka :

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = x.\frac{1}{F'(-a^2)}\sin(ax+b) \tag{5.40}$$

c. Jika $F(-a^2) = 0$, $F'(-a^2) = 0$, namun $F''(-a^2) \neq 0$, maka

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = x^2.\frac{1}{F''(-a^2)}\sin(ax+b) \tag{5.41}$$

   Rumusan di atas berlaku pula untuk Q(x) = cos (ax + b)

Contoh :

Tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen dari PD berikut :

1. $(D^2 + 4)y = \sin 3x$

   a = 3 sehingga $a^2 = 9$ dan $-a^2 = -9$

   $y_p = \frac{1}{D^2+4}\sin 3x$, ganti D^2 dengan –9, sehingga :

   $y_p = \frac{1}{-9+4}\sin 3x = -\frac{1}{5}\sin 3x$

2. $(D^2 + 4)y = \cos 2x$

$a = 2$; $a^2 = 4$ dan $-a^2 = -4$, karena $F(-a^2) = 0$, maka L(D) kita turunkan sehingga :

$y_p = x.\frac{1}{2D}.\cos 2x$, karena $-a^2$ harus menggantikan bentuk D^2, maka y_p kita kalikan dengan $\frac{D}{D}$, menjadi :

$y_p = x.\frac{D}{2D^2}\cos 2x$, gantikan D^2 dengan -4, memberikan :

$y_p = -\frac{1}{8}.x.D(\cos 2x)$, mengingat $D = \frac{d}{dx}$, maka bila kita operasikan :

$y_p = -\frac{1}{8}.x(-2\sin 2x) = \frac{1}{4}.x.\sin 2x$

3. $(D^2 + 3D - 4)y = \sin 2x$

   $a = 2$; $a^2 = 4$ dan $-a^2 = -4$

   $y_p = \frac{1}{D^2 + 3D - 4}\sin 2x$, ganti D^2 dengan -4

   $y_p = \frac{1}{3D - 8}\sin 2x$, bila kita kalikan dengan sekawannya :

   $y_p = \frac{1}{3D-8}.\frac{3D+8}{3D+8}.\sin 2x$

   $y_p = \frac{3D+8}{9D^2 - 64}\sin 2x$, gantikan D^2 dengan -4

   $y_p = \frac{(3D+8)\sin 2x}{-100}$, dan bila kita operasikan akan memberi hasil :

   $y_p = \frac{6\cos 2x + 8\sin 2x}{-100} = -\frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x$

Kasus III : **Q(x) = x^m**

$$\frac{1}{L(D)}.x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots\ldots + a_m D^m).x^m \qquad (5.42)$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen untuk PD berikut :

$$(2D^2 + 2D + 3)y = x^2 + 2x - 1$$

Maka $y_p = \dfrac{1}{2D^2 + 2D + 3} x^2 + 2x - 1$.

Bentuk $\dfrac{1}{2D^2 + 2D + 3}$ kita bagi secara sederhana seperti berikut :

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \frac{2}{27}D^2$$

$$3 + 2D + 2D^2 \;\big/\; 1$$

$$1 + \frac{2}{3}D + \frac{2}{3}D^2$$

$$\overline{} \; -$$

$$-\frac{2}{3}D - \frac{2}{3}D^2$$

$$-\frac{2}{3}D - \frac{4}{9}D^2 - \frac{4}{9}D^3$$

$$\overline{} \; -$$

$$-\frac{2}{9}D^2 + \frac{4}{9}D^3$$

Pembagian ini selesai sampai didapat bentuk D^2, sesuai dengan pangkat tertinggi dari Q(x). Setelah dilakukan pembagian tersebut, maka yp dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$y_p = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \frac{2}{27}D^2\right)(x^2 + 2x - 1)$$

Bentuk D^2 berarti $\frac{d^2}{dx^2}$,dan bila bentuk di atas kita operasikan akan mendapatkan :

$$y_p = \frac{1}{3}.x^2 + \frac{2}{9}.x - \frac{25}{27}$$

Kasus IV : **Q(x) = v(x).e^ax**, di mana v(x) merupakan fungsi sembarang dalam x

$$\frac{1}{L(D)}\left(v(x).e^{ax}\right) = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}v(x) \qquad (5.43)$$

Contoh : Tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen dari PD berikut :

1. $(D^2 - 4)y = x^2.e^{3x}$

a = 3, pindahkan suku e^{3x} ke depan, dan ganti setiap D dengan (D + 3)

$$y_p = e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2 - 4}.x^2$$

$$y_p = e^{3x}\frac{1}{D^2 + 6D + 5}.x^2$$, bentuk ini dapat diselesaikan seperti kasus III

$$y_p = e^{3x}\left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25}D + \frac{31}{125}D^2\right)x^2$$, bila dioperasikan akan memberikan hasil :

$$y_p = \frac{62}{125}e^{3x} - \frac{12}{125}.x.e^{3x} + \frac{1}{5}.x^2.e^{3x}$$

2. $(D^2 + 2D + 4)y = \sin 2x.\ e^x$

$$y_p = e^x\frac{1}{(D+1)^2 + 2(D+1) + 4}\sin 2x$$

$$y_p = e^x\frac{1}{D^2 + 4D + 7}\sin 2x$$, selesaikan seperti pada kasus II

$$y_p = e^x\frac{1}{-4 + 4D + 7}\sin 2x$$

$$y_p = e^x\frac{1}{4D + 3}\sin 2x$$, kalikan dengan sekawannya :

$$y_p = e^x \frac{1}{4D+3}.\frac{4D-3}{4D-3}.\sin 2x$$

$$y_p = e^x \frac{4D-3}{16D^2-9}\sin 2x$$

$$y_p = e^x \frac{4D-3}{-64-9}\sin 2x$$

Bila dioperasikan maka akan kita peroleh :

$$y_p = -\frac{1}{73}e^x(8\cos 2x - 3\sin 2x)$$

Kasus V : **Q(x) = x.v(x)**, dimana v(x) merupakan fungsi sembarang dalam x.

$$\frac{1}{L(D)}x.v(x) = x.\frac{1}{L(D)}.v(x) - \frac{L'(D)}{(L(D))^2} \qquad (5.44)$$

Contoh : Tentukan penyelesaian khusus bentuk tak homogen dari PD berikut ini

1. $(D^2 + 3D + 2)y = x.\sin 2x$

$L'(D) = 2D + 3$

$(L(D))^2 = (D2 + 3D + 2)2 = D^4 + 6D^3 + 13D^2 + 12D + 4$

$$y_p = \frac{1}{D^2+3D+2}x.\sin 2x = x.\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x - \frac{2D+3}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}\sin 2x$$

Menyelesaikan $x.\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x$, selesaikan seperti kasus II :

$a = 2$; $a^2 = 4$ dan $-a^2 = -4$, ganti D^2 dengan -4

$$x.\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x = x.\frac{1}{-4+3D+2}\sin 2x$$

$= x.\frac{1}{3D-2}\sin 2x$, kalikan dengan sekawannya :

$= x.\frac{1}{3D-2}.\frac{3D+2}{3D+2}\sin 2x = x.\frac{3D+2}{9D^2-4}\sin 2x$, ganti D^2 dengan -4

$= \frac{3D+2}{-36-4}\sin 2x = \frac{(3D+2)\sin 2x}{-40}$, operasikan bentuk ini hingga diperoleh :

$$= -\frac{3}{20}.x.\cos 2x - \frac{1}{20}.x.\sin 2x$$

Menyelesaikan : $-\dfrac{2D+3}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}\sin 2x$, seperti kasus II

a = 2 ; $a^2 = 4$ dan – $a^2 = -4$, ganti D^2 dengan – 4

$$-\frac{2D+3}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}\sin 2x = -\frac{2D+3}{(-4)^2-24D-52+12D+4}\sin 2x$$

$$= -\frac{2D+3}{-32-12D}\sin 2x = \frac{2D+3}{32+12D}\sin 2x$$

$= \dfrac{1}{4}.\dfrac{2D+3}{3D+8}\sin 2x$, kalikan dengan sekawannya :

$$= \frac{1}{4}.\frac{2D+3}{3D+8}.\frac{3D-8}{3D-8}.\sin 2x$$

$= \dfrac{1}{4}.\dfrac{6D^2-7D-24}{9D^2-64}\sin 2x$, ganti D^2 pada penyebut dengan – 4

$= -\dfrac{1}{400}.\left(6D^2-7D-24\right)\sin 2x$, dan bila dioperasikan :

$$= \frac{3}{50}\sin 2x + \frac{7}{200}\cos 2x + \frac{3}{50}\sin 2x$$

Sehingga penyelesaian khusus bentuk tak homogen dari PD tersebut adalah :

$$y_p = -\frac{3}{20}.x.\cos 2x - \frac{1}{20}.x.\sin 2x + \frac{3}{50}\sin 2x + \frac{7}{200}\cos 2x + \frac{3}{50}\sin 2x$$

SOAL – SOAL

Tentukan primitif dari masing –masing PD berikut !

1. $(D^2 + D - 2)y = 2x - 40 \cos 2x$
2. $y''' - y' = 4.e^{-x} + 3.e^{2x}$
3. $(D^2 + D)y = - \cos x$
4. $(D^2 - 6D +9)y = e^x$
5. $(D^2 + 3D + 2)y = 12x^2$
6. $(D^2 + 3D + 2)y = 1 + 3x + x^2$
7. $(D^2 + 9)y = 5.e^x - 162.x$
8. $(D^2 + 9)y = 5e^x - 162.x^2$
9. $(D^2 - 4)y = e^2x + 2$
10. $(D^2 - 1)y = 10 \sin^2 x$
11. $(D^2 + 1)y = 12 \cos^2 x$
12. $(D^2 + 4)y = 4 \sin^2 x$
13. $y'' - 3 y' - 4y = 16.x - 50 \cos 2x$
14. $y'' - 4y' + 3y = 20 \cos x$
15. $(D^3 + D^2 - 4D - 4)y = 8x + 8 + 6e^{-x}$
16. $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 6 + 80 \cos 2x$
17. $(D^3 + D^2 - 4D - 4)y = 3e^{-x} - 4x - 6$
18. $y'' + y = \sec^2 t \csc t$
19. $(D^3 + D^2)w = 4$
20. $w'' + 2w' + w = 7 + 75 \sin 2t$
21. $u'' + 2u' + 2u + \sin z + 2 \cos z = 0$
22. $r''(\theta) + r(\theta) = \sin \theta. \cos \theta$
23. $y'' + 4y = 3e^{2z} - \cos z$
24. $w'' + w = \cot z. \csc z$
25. $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)x(z) = z.e^{-z}$
26. $r''(\theta) + r'(\theta) - 2r(\theta) = 2\theta - 4 \cos 2\theta$
27. $(D^2 + 1)y = 10.e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = 0$
28. $(D^2 + 3D)y = - 18x$; $y(0) = 0, y'(0) = 5$
29. $y'' + 9y = 81x2 + 14 \cos 4x$
    $y(0) = 0, y'(0) = 3$
30. $(D^3 + 4D^2 + 9D + 10)y = -24e^x$; $y(0) = 0, y'(0) = -4, y''(0) = 10$
31. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$; $y(0) = 0, y'(0) = 8$
32. $(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x$
33. $(D^3 - 2D + 4)y = x4 + 3x^2 - 5x + 2$
34. $(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^2 + 3e^{2x} + 4\sin x$
35. $(D^2 - 4D + 3)y = 2.x.e^{3x} + 3e^x \cos 2x$
36. $(D^2 - 1)y = x^2. \sin 3x$
37. $4y'' + y = 2$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$
38. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 8 \sin t$
    $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$
39. $2y'' - 5y' - 3y = -9x^2 - 1$
    $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
40. $y'' + 6y' + 13y = 60 \cos x + 26$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$

BAB VI

PERSAMAAN DIFERENSIAL SIMULTAN

Persamaan Diferensial Simultan adalah suatu sistem persamaan diferensial yang diberikan dalam bentuk sebagai berikut :

$$F_1(x, y, t, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ldots\ldots\ldots) = 0$$

$$F_2(x, y, t, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ldots\ldots\ldots) = 0 \qquad (6.1)$$

Simbol titik / dot di atas x dan y, menunjukkan diferensiasi ke – t, misalnya :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{dan seterusnya} \qquad (6.2)$$

Dalam PD Simultan ini dimaksudkan untuk menentukan harga x dan y yang dinyatakan dalam fungsi t.

Contoh :

1. Tentukan primitif dari PD Simultan berikut ini :

   $$\frac{dx}{dt} + x - 2y = \sin t \qquad \ldots(\text{ i })$$

   $$\frac{dy}{dt} + x - y = 3t \qquad \ldots(\text{ ii })$$

   Dengan menggunakan simbol operator : $D = \frac{d}{dt}$, maka persamaan (i) dan (ii), dapat kita tuliskan kembali sebagai :

   $$(D + 1)x \quad - \qquad 2y = \sin t \ \ldots (\text{ i.a })$$

   $$x \ + (D + 1)y = 3t \quad \ldots(\text{ ii.a })$$

   Bila kita cermati, kedua persamaan di atas (i.a) dan (ii.a) merupakan dua buah persamaan linear dalam x dan y, dengan menggunakan teorema Cramer dapat kita cari harga x dan y.

Mencari x :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & -2 \\ 3t & (D-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D+1) & -2 \\ 1 & (D-1) \end{vmatrix}} = \frac{(D-1)\sin t + 6t}{D^2+1}$$

$$x = \frac{\cos t - \sin t + 6t}{D^2+1}, \text{ atau}$$

$(D^2 + 1)x = \cos t - \sin t + 6t$

Persamaan ini merupakan suatu PD Linear tak homogen, primitif dapat kita cari dengan metoda – metoda yang sudah dipelajari pada bab terdahulu.

Penyelesaian umum bentuk homogennya diberikan oleh :

$x_c = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Dan penyelesaian khusus bentuk tak homogen :

$$x_p = \frac{1}{D^2+1}(\cos t - \sin t + 6t)$$

Dan bila kita selesaikan akan mendapatkan hasil :

$$x_p = \frac{1}{2}t.\cos t + \frac{1}{2}t.\sin t + 6t$$

Sehingga :

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}t.\cos t + \frac{1}{2}t.\sin t + 6t$$

Mencari y :

Untuk mencari primitif y, dapat kita substitusikan harga x yang sudah kita dapat ke persamaan (i.a) :

$(D + 1)x - 2y = \sin t$

$$(D + 1).(C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}t.\cos t + \frac{1}{2}t.\sin t + 6t) - \sin t = 2y$$

Bila kita operasikan akan memberikan :

$(C_1 + C_2 + ½) \cos t + (C_2 - C_1 - ½) \sin t + t.\cos t + 6 + 6t = 2 y$

$y = ½ . \{ (C_1 + C_2 + ½) \cos t + (C_2 - C_1 - ½) \sin t + t.\cos t + 6 + 6t \}$

Selain cara di atas, y dapat pula dicari dengan menggunakan teorema Cramer, seperti pada waktu mencari x.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (D+1) & \sin t \\ 1 & 3t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D+1) & -2 \\ 1 & (D-1) \end{vmatrix}} = \frac{(D+1)3t - \sin t}{D^2+1}$$

$y = \dfrac{3+3t-\sin t}{D^2+1}$, atau :

$(D^2 + 1)y = 3 + 3t - \sin t$

Merupakan PD Linear tak homogen.

Penyelesaian umum bentuk homogennya adalah :

$y_c = C_3.\cos t + C_4.\sin t$

Dan penyelesaian khusus bentuk tak homogen :

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\left(3+3t-\sin t\right)$$

Bila diselesaikan akan didapatkan :

$y_p = 3 + 3t + ½\, t.\cos t$

Sehingga primitif : $y = C_3.\cos t + C_4.\sin t + 3 + 3t + ½\, t.\cos t$

Bentuk ini sama dengan bentuk yang diperoleh sebelumnya. Mengapa ?

Akhirnya primitif PD Simultan di atas diberikan oleh :

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t.\cos t + \frac{1}{2} t.\sin t + 6t$$

dan $\quad y = C_3.\cos t + C_4.\sin t + 3 + 3t + ½\, t.\cos t$

2. Diberikan PD simultan berikut ini, tentukan primitifnya !

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \qquad \ldots (i)$$

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \qquad \ldots(ii)$$

Dengan menggunakan operator D, maka (i) dan (ii) dapat dituliskan dalam bentuk :

$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^t \quad \ldots (i.a)$

$(D + 3) x + \quad y = 0 \quad \ldots (ii.a)$

Mencari x :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t & (D-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2D-4) & (D-1) \\ (D+3) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{e^t}{-(D^2+1)}$$

$(D^2 + 1)x = - e^t$

Merupakan PD Linear tak homogen

$x_c = C_1. \cos t + C_2. \sin t$

$x_p = - ½ e^t$

Sehingga : $x = C_1. \cos t + C_2. \sin t - ½ e^t$

Mencari y :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (2D-4) & e^t \\ (D+3) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2D-4) & (D-1) \\ (D+3) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(D+3).e^t}{(D^2+1)}$$

$$y = \frac{e^t + 3.e^t}{(D^2+1)} = \frac{4.e^t}{(D^2+1)}$$

Bila kita selesaikan PD Linear tak homogen di atas akan diperoleh :

$y_c = C_3.\cos t + C_4. \sin t$

$y_p = 2.e^t$

$y = y_c + y_p = C_3.\cos t + C_4. \sin t + 2.e^t$

Dan akhirnya primitif PD Simultan di atas diberikan oleh :

$\mathbf{x = C_1. \cos t + C_2. \sin t - ½ e^t}$

$\mathbf{y = C_3.\cos t + C_4. \sin t + 2.e^t}$

Untuk mencari y dapat dicoba dengan mensubstitusikan x yang telah diperoleh ke persamaan (ii.a). Bandingkan hasilnya !

3. Diberikan PD Linear Simultan berikut ini :

$(D^2 - 2)x - 3y = e^{2t}$ … (i)

$x + (D^2 + 2)y = 0$ … (ii)

Tentukan solusi PD tersebut bila diketahui pula : (t = 0,x =y=1,dan Dx = Dy = 0)

Mencari x :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & -3 \\ 0 & (D^2+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D^2-2) & -3 \\ 1 & (D^2+2) \end{vmatrix}} = \frac{(D^2+2).e^{t}}{D^4-1}$$

$$x = \frac{6.e^{2t}}{D^4-1}\text{, atau}$$

$(D^4 - 1)x = 6.e^{2t}$

Penyelesaian umum bentuk homogennya :

$x_c = C_1.e^{-t} + C_2.e^t + C_3.\cos t + C_4.\sin t$

Dan penyelesaian khusus bentuk tak homogen :

$$x_p = \frac{2}{5}.e^{2t}$$

$$x = C_1.e^{-t} + C_2.e^t + C_3.\cos t + C_4.\sin t + \frac{2}{5}.e^{2t}$$

Mencari y :

Substitusikan x ke persamaan (ii) :

$(D^2 + 2)y + x = 0$

$$(D^2 + 2)y = -C_1.e^{-t} - C_2.e^t - C_3.\cos t - C_4.\sin t - \frac{2}{5}.e^{2t}$$

$$y = -\frac{1}{D^2+2}\left\{C_1.e^{-t} + C_2.e^t + C_3.\cos t + C_4.\sin t + \frac{2}{5}.e^{2t}\right\}$$

Bila dioperasikan akan memberi hasil :

$$y = -\frac{1}{3}.C_1.e^{-t} - \frac{1}{3}.C_2.e^t - C_3.\cos t - C_4.\sin t - \frac{1}{15}.e^{2t}$$

Sehingga primitif PD tersebut adalah :

$x = C_1.e^{-t} + C_2.e^{t} + C_3.\cos t + C_4.\sin t + \frac{2}{5}.e^{2t}$

$y = -\frac{1}{3}.C_1.e^{-t} - \frac{1}{3}.C_2.e^{t} - C_3.\cos t - C_4.\sin t - \frac{1}{15}.e^{2t}$

Mengingat syarat awal bahwa untuk t = 0, maka x = y = 1 dan Dx = Dy = 0

t = 0 $\quad y = -\frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 - C_3 - \frac{1}{15} = 1 \qquad$ (a)

$\quad x = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{2}{5} = 1 \qquad$ (b)

t = 0 $\quad Dy = \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 - C_4 - \frac{2}{15} = 0 \qquad$ (c)

$\quad Dx = -C_1 + C_2 + C_4 + \frac{4}{5} = 0 \qquad$ (d)

Dari persamaan (a), (b), (c), (d), maka dapat disusun suatu persamaan linear dengan empat perubah, dan bila kita susun dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/15 \\ 3/5 \\ 2/15 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$

Bila diselesaikan maka akan memberikan harga – harga :

$C_1 = \frac{7}{4} \qquad C_2 = \frac{3}{4} \qquad C_3 = -\frac{19}{10} \qquad C_4 = \frac{1}{5}$

Sehingga primitif PD Simultan dengan syarat awal tersebut adalah :

$$y = -\frac{7}{12}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t} + \frac{19}{10}\cos t - \frac{1}{5}\sin t - \frac{1}{15}e^{2t}$$

$$x = \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t} - \frac{19}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}e^{2t}$$

4. Tentukan primitif dari PD Simultan yang diberikan berikut ini :

$(D - 1)x + Dy = 2t + 1$

$(2D + 1)x + 2Dy = t$

Mencari x :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2t+1 & D \\ t & 2D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D-1) & D \\ (2D+1) & 2D \end{vmatrix}} = \frac{2D(2t+1) - Dt}{-3D}$$

$x = \dfrac{3Dt + 2D}{-3D} = \dfrac{3t+2}{-3}$, atau :

$$x = -t - \frac{2}{3}$$

Mencari y :

Substitusikan x ke persamaan (i) :

$(D - 1)x + Dy = 2t + 1$

$(D - 1)(-t - \frac{2}{3}) + Dy = 2t + 1$

Bila dioperasikan akan diperoleh :

$$Dy = t + \frac{4}{3}$$

$$y = \int (t + \frac{4}{3})dt = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + C$$

Dan primitif PD Simultan tersebut adalah :

$$x = -t - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + C$$

5. Tentukan primitif dari PD Simultan berikut :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1 \qquad \ldots(\text{ i })$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2x + z = 1 \qquad \ldots(\text{ ii })$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + y + 2z = 0 \qquad \ldots(\text{ iii })$$

Dengan menggunakan operator D, serta mengumpulkan suku – sukunya persamaan di atas dapat pula kita tulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{llllr} Dx & + (D+1)y & & = 1 & \ldots (\text{ i.a }) \\ (D+2)x & & -(D-1)z & = 1 & \ldots (\text{ ii.a }) \\ & (D+1)y & +(D+2)z & = 0 & \ldots (\text{ iii.a }) \end{array}$$

Mencari z :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} D & D+1 & 1 \\ D+2 & 0 & 1 \\ 0 & D+1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix}} = \frac{2(D+1)}{-(5D+4)(D+1)}$$

$z = \dfrac{-2}{5D+4}$, atau

(5D + 4)z = – 2

5Dz + 4z = –2

$$\frac{dz}{dt} + \frac{4}{5}z = -\frac{2}{5}$$

Merupakan PD Linear ordo satu, dan bila diselesaikan akan memberikan :

$$z = -\frac{1}{2} + C_1.e^{-\frac{4}{5}t}$$

Mencari x :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & D+1 & 0\\ 1 & 0 & -D+1\\ 0 & D+1 & D+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D & D+1 & 0\\ D+2 & 0 & -D+1\\ 0 & D+1 & D+2\end{vmatrix}}=\frac{-3(D+1)}{-(5D+4)(D+1)}$$

$x=\frac{3}{5D+4}$, atau

(5D + 4)x = 3

5Dx + 4x = 3

$$\frac{dx}{dt}+\frac{4}{5}x=\frac{3}{5}$$

Merupakan PD Linear ordo satu, dan memberikan primitif :

$$x=\frac{3}{4}+C_2.e^{-\frac{4}{5}t}$$

Mencari y :

Untuk mencari y ada beberapa cara, namun di sini akan kita substitusikan z ke persamaan (iii.a)

(D + 1)y + (D + 2)z = 0

(D + 1)y = – (D + 2)z

$$(D + 1)y = -(D + 2)(-\frac{1}{2}+C_1.e^{-\frac{4}{5}t})$$

$$(D + 1)y = 1-\frac{6}{5}.C_1.e^{-\frac{4}{5}t}$$

Dan akan diperoleh :

$$y = 1-6.C_1.e^{-\frac{4}{5}t}+C_3.e^{-t}$$

Dengan demikian primitif PD Simultan di atas adalah :

$$x = \frac{3}{4} + C_2.e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$y = 1 - 6.C_1.e^{-\frac{4}{5}t} + C_3.e^{-t}$$

$$z = -\frac{1}{2} + C_1.e^{-\frac{4}{5}t}$$

Latihan:

Tentukan primitif dari PD Simultan yang diberikan berikut ini:

1. $\frac{dx}{dt} + y = t$

   $\frac{dy}{dt} + 4t = 0$

2. $\frac{dx}{dt} - 2y = 3$

   $\frac{dy}{dt} + y - x = -t^2$

3. $\frac{dx}{dt} - (1-t)x - e^t y - (\sin t)\, z = 1$

   $\frac{dy}{dt} - 3x - ty - (\cos t)\, z = t\, e^{2t}$

   $\frac{dz}{dt} - z = 0$

4. $3\frac{dx}{dt} + 7\frac{dy}{dt} + 34x + 38y = e^t$

   $4\frac{dx}{dt} + 9\frac{dy}{dt} + 44x + 49y = t$

5. $\frac{d^2x}{dt} - 3x - 4y = 0$

   $\frac{d^2y}{dt} + x + y = 0$

6. $\frac{d^2x}{dt} - 3x - 4y + 3 = 0$

$$\frac{d^2y}{dt} + x + y + 5 = 0$$

7. $$\frac{d^2x}{dt} + 4x + y = t\,e^t$$
$$\frac{d^2y}{dt} + y - 2x = \sin^2 t$$

8. $$\frac{dx}{dt} + 2x - 3y = t$$
$$\frac{dy}{dt} - 3x + 2y = te^{2t}$$

9. $$\frac{d^2x}{dt} - 2\,\frac{dy}{dt} - x = e^t \cos t$$
$$\frac{d^2y}{dt} + 2\,\frac{dx}{dt} - y = e^t \sin t$$

10. $$\frac{d^2x}{dt} - \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} + x = 0$$

BAB VII

PD LINEAR DENGAN KOEFISIEN FUNGSI BERBENTUK KHUSUS

Persamaan Diferensial yang akan dibahas dalam bab ini merupakan PD Linear ordo tinggi, namun dengan koefisien suatu fungsi yang berbentuk khusus. Ada dua macam PD yang akan dibahas di sini, yakni PD Cauchy dan PD Legendre.

7.1. PD Cauchy

Bentuk umum dari PD Cauchy ini adalah sebagai berikut :

$$P_0.x^n.\frac{d^n y}{dx^n} + P_1.x^{n-1}.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + P_{n-1}.x.\frac{dy}{dx} + P_n.y = Q(x) \qquad (7.1)$$

Dimana $P_0 \neq 0$

Penyelesaiannya dengan melakukan substitusi

$$\mathbf{x = e^z} \qquad (7.2)$$

Dari (7.2) memberikan pula :

$$z = \ln x \qquad \text{dan} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (7.3)$$

Dengan menggunakan aturan rantai :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{1}{x} \qquad (7.4)$$

Dari (7.4) dapat diperoleh :

$$x.\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \qquad (7.5)$$

Dengan menggunakan simbol $\frac{d}{dx} = \mathbf{D}$ dan $\frac{d}{dz} = \mathcal{D}$, maka (7.5) dapat ditulis :

$$x.Dy = \mathcal{D}y \qquad (7.6)$$

Bagaimana dengan bentuk $\frac{d^2y}{dx^2}$?

$$\frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D(\frac{dy}{dz}.\frac{1}{x}) \qquad (7.7)$$

$$= \frac{dy}{dz}.\frac{d}{dx}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}.\frac{d}{dx}\frac{dy}{dz}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Atau dapat dituliskan pula :

$$x^2D^2y \;=\; (\mathcal{D}^2 - \mathcal{D})y = \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)y \qquad (7.8)$$

Demikian seterusnya hingga dapat diperumum sebagai berikut :

$$x^r D^r y = \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)(\mathcal{D} - 2)\ldots..(\mathcal{D} - r + 1)y \qquad (7.9)$$

Dan PD semula pada (7.1) menjadi :

$$P_0.\mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)\ldots(\mathcal{D} - n + 1)y + \ldots\ldots.. + P_{n-1}.\mathcal{D}y + P_n.y = Q(e^z) \qquad (7.10)$$

PD pada (7.10) dapat dikenali sebagai PD Linear ordo tinggi dengan koefisien konstan.

Contoh :

1. Tentukan primitif dari PD :

$$(x^3D^3 + 3x^2D^2 - 2xD + 2)y = 0$$

Substitusikan $x = e^z$, PD dapat diubah menjadi :

$$\begin{array}{lrl} x^3D^3y & = & (\mathcal{D}^3 - 3\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D})y \\ 3x^2D^2y & = & (3\mathcal{D}^2 - 3\mathcal{D})y \\ - 2xDy & = & - 2\mathcal{D}y \\ 2y & = & 2y \\ \hline & & (\mathcal{D}^3 - 3\mathcal{D} + 2)y = 0 \end{array} +$$

Maka primitif PD tersebut adalah :

$y = C_1.e^z + C_2.z.e^z + C_3.e^{-2z}$

Substitusikan z = ln x, dan diperoleh :

$y = C_1.x + C_2.x.\ln x + C_3.x^{-2}$

2. Tentukan primitif PD berikut :

$(x^3D^3 + 2xD - 2)y = x^2\ln x + 3x$

Substitusikan $x = e^z$, PD dapat diubah menjadi :

$$
\begin{array}{lll}
x^3D^3y & = & (\mathcal{D}^3 - 3\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D})y \\
2xDy & = & 2\mathcal{D}y \\
-2y & = & -2y \\
\hline
\end{array} +
$$

$$(\mathcal{D}^3 - 3\mathcal{D}^2 + 4\mathcal{D} - 2)y = e^{2z}.z + 3e^z$$

Bila diselesaikan akan memberi primitif :

$y = C_1.e^z + e^z(C_2 \cos z + C_3 \sin z) + ½\, z.e^{2z} - e^{2z} + 3z.e^z$

Substitusikan z = ln x, akan mendapat :

$y = C_1.x + x.(C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)) + ½\, x^2.\ln x - x^2 + 3.x.\ln x$

3. Tentukan primitif PD berikut :

$(x^2D^2 - xD + 4)y = \cos(\ln x) + x.\sin(\ln x)$

Substitusikan $x = e^z$, PD dapat dirubah menjadi :

$$
\begin{array}{lll}
x^2D^2y & = & (\mathcal{D}^2 - \mathcal{D})y \\
-xDy & = & -\mathcal{D}y \\
4y & = & 4y \\
\hline
\end{array} +
$$

$$(\mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + 4)y = \cos z + e^z.\sin z$$

Dan dapat ditemukan bahwa primitif PD adalah :

$$y = e^z \left\{ C_1.\cos z\sqrt{3} + C_2.\sin z\sqrt{3} \right\} + \frac{3}{13}\cos z - \frac{2}{13}\sin z + \frac{1}{2}e^z.\sin z$$

Selanjutnya dapat disubstitusikan z = ln x

Latihan:

Tentukan primitif PD berikut :

1. $x^2\,\mathrm{D}^2 - 2x\,\mathrm{D} - 4y = 0$
2. $x^2\,\mathrm{D}^2 - 9x\,\mathrm{D} - 20y = 0$
3. $4\,x^2\,\mathrm{D}^2 + 8\,x\mathrm{D} + \ y = 0$
4. $x^3\,\mathrm{D}^3 + 5\,x^2\,\mathrm{D}^2 + 7x\,\mathrm{D} + 8y = 0$
5. $x^4\,\mathrm{D}^4 + 6\,x^3\,\mathrm{D}^3 + 9\,x^2\,\mathrm{D}^2 + 3\,x\mathrm{D} + \ y \ = 0$
6. $x^2\,\mathrm{D}^2 + 10x\,\mathrm{D} + 8y = x^2$
7. $x^2\,\mathrm{D}^2 - 3x\,\mathrm{D} + 13y = 4 + 3x$
8. $x^2\,\mathrm{D}^2 - 3x\,\mathrm{D} + 3y = 2x^4e^x$
9. $x^2\,\mathrm{D}^2 - x\,\mathrm{D} + y = \ln x$
10. $x^3\,\mathrm{D}^3 - 3\,x^2\,\mathrm{D}^2 + 6x\,\mathrm{D} - 6y = 3 + \ln x$

7.2. PD Legendre

Bentuk umum PD Legendre adalah :

$$P_0.(ax+b)^n.\frac{d^n y}{dx^n}+P_1.(ax+b)^{n-1}.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+......+P_{n-1}.(ax+b).\frac{dy}{dx}+P_n.y=Q(x) \qquad (7.10)$$

Untuk menyelesaikannya maka kita substitusikan :

$$(ax + b) = e^z \qquad (7.11)$$

Dan akan diperoleh pula :

$$z = \ln (ax +b) \qquad (7.12)$$

Dengan cara yang sama seperti PD Cauchy, akan diperoleh hubungan :

$$(ax +b)^n = a^n.\mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)(\mathcal{D} - 2).....(\mathcal{D} - n +1) \qquad (7.13)$$

Contoh :

1. Tentukan primitif PD berikut ini :

$$(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\frac{dy}{dx}+y=3x+4$$

Substitusikan : $(x +2) = e^z$

PD dapat dirubah menjadi :

$$\begin{array}{rcl} (x+2)^2D^2y & = & (\mathcal{D}^2 - \mathcal{D})y \\ -(x+2)Dy & = & -\mathcal{D}y \\ y & = & y \\ \hline \end{array} +$$

$$(\mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + 1)y = 3e^z - 2$$

Dan bila diselesaikan akan memberikan primitif :

$$Y = C_1.e^z + C_2.z.e^z + \frac{3}{2}.z^2.e^z - 2$$

Dengan mengingat $(x + 2) = e^z$ serta $z = \ln (x +2)$, maka primitif PD adalah :

$$Y = C_1.(x+2) + C_2.(x+2)\ln (x+2) + \frac{3}{2}(x+2)^2\ln^2(x+2) - 2$$

2. Tentukan primitifnya :

$$\{ (3x + 2)^2D^2 + 3(3x + 2)D - 36 \}y = 3x^2 + 4x + 1$$

Dengan susbtitusi (3x + 2) = e^z, maka PD dapat dirubah menjadi :

$$(3x + 2)^2D^2y = (9\mathcal{D}^2 - 9\mathcal{D})y$$

$$3 (3x + 2)Dy = \quad 9\mathcal{D}y$$

$$-36y = \quad -36\,y$$

$$+$$

$$(9\mathcal{D}^2 - 36)y = \frac{1}{3}(e^{2z} - 1)$$

Dan primitifnya dapat ditemukan :

$$y = C_1.e^{2z} + C_2.e^{-2z} + \frac{1}{108}z.e^{2z} + \frac{1}{108}$$

Susbstitusikan e^z = (3x + 2) serta z = ln (3x +2)

$$y = C_1.(3x + 2)^2 + C_2.(3x - 2)^{-2} + \frac{1}{108}(3x+2)^2\ln(3x+2) + \frac{1}{108}$$

Latihan

Tentukan primitif PD berikut ini :

1. $(x + 2)^2\,\mathrm{D}^2 + (x + 2)\mathrm{D} + \mathrm{y} = 0$
2. $(x - 4)^2\,\mathrm{D}^2 - 5(x - 4)\mathrm{D} + 9\mathrm{y} = 0$
3. $(x + 2)^2\,\mathrm{D}^2 - (x + 2)\mathrm{D} + \mathrm{y} = 5x + 6$
4. $(2x + 1)^2\,\mathrm{D}^2 - 2(2x + 1)\mathrm{D} - 12y = 6\,x$
5. $(x + 1)^2\,\mathrm{D}^2 + (x + 1)\mathrm{D} = (2\,x + 3)(2x + 4)$
6. $(3x + 2)^2\,\mathrm{D}^2 - 3(3x + 2)\mathrm{D} - 36y = 3x^2 + 4x + 1$
7. $(4x + 1)^2\,\mathrm{D}^2 + 2(4x + 1)\mathrm{D} + y = 2x + 1$
8. $(2x + 5)^2\,\mathrm{D}^2 - 6(2x + 5)\mathrm{D} + 8y = 5\log(2x + 5)$
9. $(x + 1)^2\,\mathrm{D}^2 + (x + 1)\mathrm{D} - y = 2\log(x + 1) + (x - 1)$
10. $(2x + 1)^2\,\mathrm{D}^2 + 2(2x + 1)\mathrm{D} + 4y = 4\sin(2\log(2x + 1))$

BAB VIII

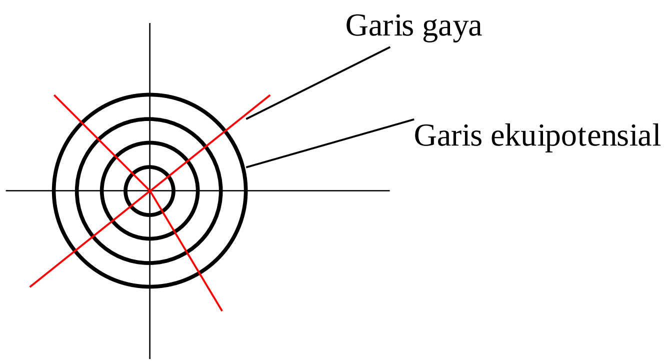
TRAYEKTORI ORTHOGONAL

8.1. Definisi

Grafik solusi persamaan diferensial biasa sering disebut pula sebagai trayektori. Dalam **ilmu Fisika** (listrik statik) : garis gaya dan potensial merupakan dua sistem kurva yang saling berpotongan tegak lurus

Dalam **mekanika fluida** : kurva arus dan kurva potensial juga dua sistem kurva yang berpotongan tegak lurus

Kedua sistem kurva ini dipandang sebagai solusi dua persamaan diferensial, di mana yang satu memotong tegak lurus trayektori yang lain, sehingga disebut **trayektori orthogonal.**



Gb. 8.1 Garis gaya dan ekuipotensial dalam listrik statik

Dalam gambar 8.1 diperlihatkan garis gaya listrik (merupakan trayektori suatu PD, misal T_1), dan garis ekuipotensial (trayektori PD lain, misal T_2). T_1 dan T_2 merupakan dua sistem kurva yang saling memotong tegak lurus. Sehingga dapat dikatakan bahwa T_1 adalah trayektori orthogonal dari T_2, atau T_2 adalah trayektori orthogonal dari T_1.

8.2. Menentukan Trayektori Orthogonal Suatu Sistem Kurva

Untuk menentukan trayektori orthogonal suatu sistem kurva f(x,y,c) = 0, dapat ditempuh langkah – langkah berikut :

1. Tentukan PD terkait dari f(x,y,c)

2. Dari PD terkait tersebut gantilah $\frac{dy}{dx}$ dengan $-\frac{dx}{dy}$
3. Cari primitif dari PD tersebut misal g(x,y,k) = 0
4. Maka g(x,y,k) = 0, adalah trayektori orthogonal dari f(x,y,c) = 0

Contoh :

1. Diberikan sistem kurva : xy = C

   Cari PD terkait :

   $$x.\frac{dy}{dx} + y = 0$$

   Ganti $\frac{dy}{dx}$ dengan $-\frac{dx}{dy}$, sehingga diperoleh :

   $-x.\frac{dx}{dy} + y = 0$, dan primitif PD ini dengan mudah dapat dicari yaitu :

   $\mathbf{x^2 - y^2 = K}$ $\rightarrow$ merupakan trayektori orthogonal dari xy = C

2. Diberikan sistem kurva :

   $x^2 + 2y^2 = C$, tentukan trayektori orthogonalnya !

   Cari PD terkait, yakni :

   $$2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

   Ganti $\frac{dy}{dx}$ dengan $-\frac{dx}{dy}$, sehingga diperoleh :

   $$2x - 4y\frac{dx}{dy} = 0$$

   Dan primitif PD tersebut adalah :

   $\mathbf{y^2 = K.x^4}$ $\rightarrow$ merupakan trayektori orthogonal dari $x^2 + 2y^2 = C$

3. Tentukan trayektori orthogonal dari

   $y = C.e^{-2x}$

   Cari PD terkait yakni :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Ganti $\frac{dy}{dx}$ dengan $-\frac{dx}{dy}$, sehingga diperoleh :

$$-\frac{dx}{dy} + 2y = 0$$

Dan primitifnya : $\mathbf{y^2 - x = C}$ $\rightarrow$ trayektori orthogonal dari $y = C.e^{-2x}$

DAFTAR PUSTAKA

1. Earl D Rainville, Phillip E Bedient and Richard E Bedient, **Elementary Differential Equations**, Eight Edition, Prentice Hall International Inc., 1997
2. Edwin J Purcell, **Calculus With Analytic Geometry**, 3rd edition, Prentice Hall International Inc., 1978
3. Erwin Kreyszig, **Advanced Engineering Mathematics**, Sixth Edition, John Wiley & Sons, 1988
4. Frank Ayres Jr., PhD., **Theory and Problems of Calculus**, 2nd Edition, Schaum Outline Series
5. Garret Birkhoff and Giancarlo Rota, **Ordinary Differential Equations**, Fourth Edition, John Wiley & Sons, 1988]
6. H.M. Hasyim Baisuni, **Kalkulus**, Penerbit Universitas Indonesia, 1986
7. Paul Bugl, **Differential Equations, Matrices and Models**, Prentice Hall International Inc., 1995
8. Catatan Kuliah Matematika III (Drs. H Haryono)
9. Catatan Kuliah Matematika Rekayasa II (Prof. Dr. M Ansjar)