

PENGEMBANGAN BAHAN PENGAJARAN



Program Komputer sebagai Alat Bantu Perkuliahan Kalkulus 1 dalam Menjelaskan Penghitungan dan Pengertian Integral

Dibuat oleh:

**Nur Uddin, PhD
NIDN: 0325067804**

**PROGRAM STUDI INFORMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI DAN DESAIN
UNIVERSITAS PEMBANGUNAN JAYA
TANGERANG SELATAN
Ganjil 2019/2020**

▼ Program Python untuk Menghitung Integral

Dibuat oleh: Nur Uddin

Kegunaan: Alat bantu perkuliahan Kalkulus 1 dalam memahami penghitungan dan pengertian integral

Program ini dibuat untuk menyelesaikan persoalan integral secara simbolik dan numerik menggunakan Python. Program Python ini ditulis menggunakan Google Colab. Dengan Google Colab setiap program ditulis didalam cell. Untuk menjalankan program setiap cell dilakukan dengan menekan tombol play atau menekan tombol shift dan enter secara bersamaan.

Program ini terdiri dari dua bagian, yaitu:

- a) Penghitungan integral secara symbolic menggunakan Python dengan toolbox symbolic mathematics (sympy).
 - b) Penghitungan integral secara numerik menggunakan metode trapesium.
-

▼ A. Menghitung integral menggunakan symbolic mathematics (sympy)

1. Hitunglah:

$$y = \int x^2 dx$$

Untuk menghitung integral tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a) memanggil library dari toolbox sympy,
- b) mendefinisikan x sebagai suatu simbol,
- c) mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan (dalam hal ini x^2), fungsi tersebut dapat didefinisikan misalkan sebagai $f = x^2$,
- d) lakukan proses integrasi dan simpan hasilnya sebagai y ,
- e) tampilkan hasil integral.

```
from sympy import *      # memanggil library dari toolbox sympy

x = symbols('x')        # mendefinisikan x sebagai suatu simbol

f = x**2                 # mendefinisikan fungsi f
y = integrate(f, x)      # melakukan proses integrasi
print(y)                 # menampilkan hasil integral

x**3/3
```

Dari program diatas diperoleh:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

2. Hitunglah:

$$y = \int_0^5 (3x^2 + 2x)dx$$

Untuk menghitung integral tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- memanggil library dari toolbox sympy,
- mendefinisikan x sebagai suatu simbol,
- mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan (dalam hal ini $3x^2+2x$), fungsi tersebut dapat didefinisikan misalkan sebagai $f = 3x^2 + 2x$,
- lakukan proses integrasi dengan batas integral 0 dan 5, dan simpan hasilnya sebagai y ,
- tampilkan hasil integral.

```
from sympy import *          # memanggil library dari toolbox sympy

x = symbols('x')            # mendefinisikan x sebagai suatu simbol
f = (3*x**2+2*x)            # mendefinisikan fungsi f
y = integrate(f, (x,0,5))    # melakukan proses integrasi
print(y)                    # menampilkan hasil integral

150
```

3. Hitunglah:

$$y = \int \frac{1}{x}dx$$

```
from sympy import *          # memanggil library dari toolbox sympy

x = symbols('x')            # mendefinisikan x sebagai suatu simbol
f = 1/(x)                    # mendefinisikan fungsi f
y = integrate(f, (x))        # melakukan proses integrasi
print('y=',y)              # menampilkan hasil integral

y= log(x)
```

4. Hitunglah:

$$y = \int x^2 \sin(x)dx$$

Jawab:

Untuk menghitung integral tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a) memanggil library dari toolbox sympy,
- b) mendefinisikan x sebagai suatu simbol,
- c) mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan (dalam hal ini $x^2 \sin(x)$), fungsi tersebut dapat didefinisikan misalkan sebagai $f = x^2 \sin(x)$,
- d) lakukan proses integrasi dan simpan hasilnya sebagai y ,
- e) tampilkan hasil integral.

```

from sympy import *          # memanggil library dari toolbox sympy

x = symbols('x')           # mendefinisikan x sebagai suatu simbol
f=x**2*sin(x)              # mendefinisikan fungsi f
y = integrate(f, (x))      # melakukan proses integrasi
print('y=',y)             # menampilkan hasil integral

y= -x**2*cos(x) + 2*x*sin(x) + 2*cos(x)

```

5. Hitunglah:

$$y = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Jawab:

Untuk menghitung integral tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a) memanggil library dari toolbox sympy,
- b) mendefinisikan x sebagai suatu simbol,
- c) mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan (dalam hal ini $\frac{1}{(x+1)^2}$), fungsi tersebut dapat didefinisikan misalkan sebagai $f = \frac{1}{(x+1)^2}$,
- d) lakukan proses integrasi dan simpan hasilnya sebagai y ,
- e) tampilkan hasil integral.

```

from sympy import *          # memanggil library dari toolbox sympy

x = symbols('x')           # mendefinisikan x sebagai suatu simbol
f = 1/((x+1)**2)          # mendefinisikan fungsi f
y = integrate(f, (x))      # melakukan proses integrasi
print('y=',y)             # menampilkan hasil integral

y= -1/(x + 1)

```

6. Hitunglah

$$y = \int \sin x \cos 2x dx$$

Jawab:

Untuk menghitung integral tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- memanggil library dari toolbox sympy,
- mendefinisikan x sebagai suatu simbol,
- mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan (dalam hal ini $\sin x \cos 2x$), fungsi tersebut dapat didefinisikan misalkan sebagai $f = \sin x \cos 2x$,
- lakukan proses integrasi dan simpan hasilnya sebagai y ,

```

from sympy import *                # memanggil library dari toolbox sympy

x = symbols('x')                  # mendefinisikan x sebagai suatu simbol
f = (sin(x))*cos(2*x)             # mendefinisikan fungsi f
y = integrate(f, x)               # melakukan proses integrasi
print('y=',y)                    # menampilkan hasil integral

y= 2*sin(x)*sin(2*x)/3 + cos(x)*cos(2*x)/3

```

▼ B. Menghitung integral secara numerik

Pada bagian ini akan ditunjukkan penghitungan hasil integral secara numerik dengan pendekatan trapesium. Secara teori, menghitung

$$\int_a^b f(x) dx$$

merupakan penghitungan luas area yang dilingkupi oleh fungsi $f(x)$. Luas daerah tersebut dihitung dengan cara sebagai berikut:

- Mempartisi area yang dilingkupi oleh fungsi $f(x)$ tersebut menjadi bagian kecil-kecil dengan lebar partisi pada arah x sebesar Δx . Jumlah partisi yang dihasilkan sebanyak N , dimana:

$$N = \frac{a - b}{\Delta x}$$

- Setiap partisi pada arah x akan dibatasi oleh x_k dan x_{k+1} , dimana:

$$x_k = a + k\Delta x$$

$$x_{k+1} = a + (k + 1)\Delta x.$$

- Setiap batas partisi akan memiliki nilai y sebagai berikut:

$$y_k = f(x_k)$$

$$y_{k+1} = f(x_{k+1})$$

- Menghitung luas setiap partisi dengan mendekatinya sebagai luas trapesium:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}[y_{k+1} + y_k]dx$$

dimana $y_k = f(x_k)$ dan $y_{k+1} = f(x_{k+1})$.

e) Menjumlahkan semua luas partisi untuk mendapatkan total luas area yang dilingkupi oleh fungsi $f(x)$:

$$A = \sum_{k=0}^{k=N-1} A_k$$

1) Dengan menggunakan Python, hitunglah integral berikut secara numerik:

$$\int_0^3 x dx$$

Jawab: Untuk membuat program Python guna menghitung integral tersebut secara numerik lakukan langkah-langkah berikut:

a) import library yang diperlukan: numpy dan matplotlib.pyplot

b) definisikan batas integral

c) definisikan lebar partisi Δx , misal $\Delta x = 0.01$

d) buatlah array yang berisikan nilai x_k

e) buatlah array yang berisikan nilai y_k

f) visualisasikan grafik y terhadap x

```
# a) import library yang diperlukan: numpy dan matplotlib.pyplot
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
# b) definisikan batas integral
```

```
a = 0
```

```
b = 3
```

```
# c) definisikan lebar partisi  $\Delta x$ , misal  $\Delta x = 0.01$ , dan menghitung jumlah partisi N  
dx = 0.01
```

```
N = int((b-a)/dx)
```

```
# d) membuat array yang berisikan nilai  $x_k$ 
```

```
x = np.arange(a, b+dx, dx)
```

```
# e) membuat array yang berisikan nilai  $y_k$ 
```

```
y = x
```

```
# f) visualisasikan grafik  $y$  terhadap  $x$ 
```

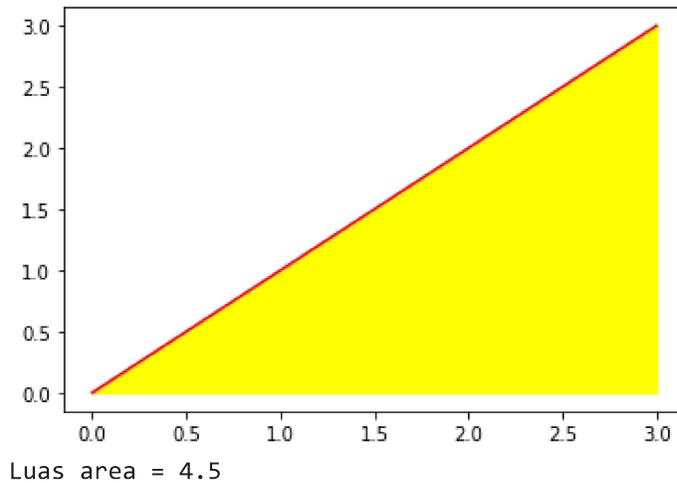
```
plt.plot(x,y, 'r')
```

```
plt.fill_between(x,y, color='yellow')
```

```
plt.show()
```

```
# g) menghitung luas setiap partisi dan menjumlahkannya semua luas partisi
A = 0
for k in range(N):
    dA = 0.5*(y[k]+y[k+1])*dx
    A = A+dA

print('Luas area =', A)
```



2) Dengan menggunakan Python, hitunglah integral berikut secara numerik:

$$\int_0^3 x^2 dx$$

Jawab: Untuk membuat program Python guna menghitung integral tersebut secara numerik lakukan langkah-langkah berikut:

- import library yang diperlukan: numpy dan matplotlib.pyplot
- definisikan batas integral
- definisikan lebar partisi Δx , misal $\Delta x = 0.01$
- buatlah array yang berisikan nilai x_k
- buatlah array yang berisikan nilai y_k
- visualisasikan grafik y terhadap x

```
# a) import library yang diperlukan: numpy dan matplotlib.pyplot
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
# b) definisikan batas integral
a = 0
b = 3
```

```
# c) definisikan lebar partisi  $\Delta x$ , misal  $\Delta x = 0.01$ , dan menghitung jumlah partisi N
```

```

# c) mendefinisikan lebar partisi  $\Delta x$ , misal  $\Delta x = 0.01$ , dan menghitung jumlah partisi  $N$ 
dx = 0.01
N = int((b-a)/dx)

# d) membuat array yang berisikan nilai  $x_k$ 
x = np.arange(a, b+dx, dx)

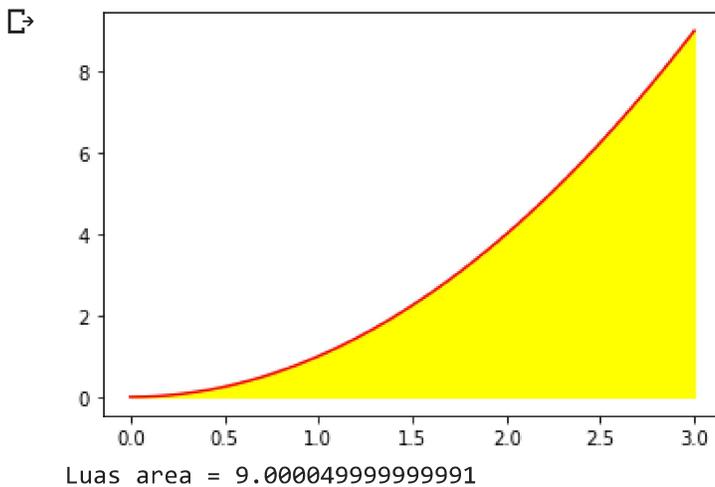
# e) membuat array yang berisikan nilai  $y_k$ 
y = x**2

# f) visualisasikan grafik  $y$  terhadap  $x$ 
plt.plot(x,y,'r')
plt.fill_between(x,y, color='yellow')
plt.show()

# g) menghitung luas setiap partisi dan menjumlahkannya semua luas partisi
A =0
for k in range(N):
    dA = 0.5*(y[k]+y[k+1])*dx
    A = A+dA

print('Luas area =', A)

```



3) Dengan menggunakan Python, hitunglah integral berikut secara numerik:

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx$$

Jawab: Untuk membuat program Python guna menghitung integral tersebut secara numerik lakukan langkah-langkah berikut:

- import library yang diperlukan: numpy dan matplotlib.pyplot
- definisikan batas integral
- definisikan lebar partisi Δx , misal $\Delta x = 0.01$
- buatlah array yang berisikan nilai x_k

e) buatlah array yang berisikan nilai $y_k = f(x_k)$

f) visualisasikan grafik y terhadap x

- Gambarkan grafik dari fungsi $y = 1 - x^2$ untuk $0 \leq x \leq 1$.
- Gambarkan area dibawah kurva $y = 1 - x^2$
- Hitunglah luas area tersebut dengan menghitung:

$$A = \int_0^1 (1 - x^2) dx$$

a) import library yang diperlukan: numpy dan matplotlib.pyplot

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

b) definisikan batas integral

```
a = 0
b = 1
```

c) definisikan lebar partisi Δx , misal $\Delta x = 0.01$, dan menghitung jumlah partisi N

```
dx = 0.01
N = int((b-a)/dx)
```

d) membuat array yang berisikan nilai x_k

```
x = np.arange(a, b+dx, dx)
```

e) membuat array yang berisikan nilai $y_k=f(x_k)$

```
y = 1-x**2
```

f) visualisasikan grafik y terhadap x

```
plt.plot(x,y,'r')
plt.fill_between(x,y, color='yellow')
plt.show()
```

g) menghitung luas setiap partisi dan menjumlahkannya semua luas partisi

```
A = 0
for k in range(N):
    dA = 0.5*(y[k]+y[k+1])*dx
    A = A+dA
```

```
print('Luas area =', A)
```

